

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY



**KOTÚĽANIE ROVINNÝCH A PRIESTOROVÝCH
KRIVIEK**

2011

Bc. Pavel Zábudlý

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

94f15cba-b6c7-4ea1-b225-d2b385dfd28a

**KOTÚĽANIE ROVINNÝCH A PRIESTOROVÝCH
KRIVIEK**

Diplomová práca

Počítačová grafika a geometria

Študijný odbor 9.1.1 Matematika

Katedra algebry, geometrie a didaktickej matematiky

Vedúci záverečnej práce: doc. RNDr. Miloš Božek, CSc.

Bratislava, 2011

Bc. Pavel Zábudlý



Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Bc. Pavel Zábudlý
Študijný program: počítačová grafika a geometria (Jednoodborové štúdium, magisterský II. st., denná forma)
Študijný odbor: 9.1.1. matematika
Typ záverečnej práce: diplomová
Jazyka záverečnej práce: slovenský

Názov: Kotúľanie rovinných a priestorových kriviek

Cieľ: Naštudovanie problematiky. Maticové vyjadrenie rovníc kotúľania jednej rovinatej krivky po druhej. Preskúmanie možnosti definície a opisu kotúľania jednej priestorovej krivky po druhej priestorovej krivke a prípadne aj po ploche

Vedúci: doc. RNDr. Miloš Božek, CSc.

Dátum zadania: 22.10.2009

Dátum schválenia: 21.03.2010

prof. RNDr. Július Korbaš, CSc.
garant študijného programu

študent

vedúci práce

Dátum potvrdenia finálnej verzie, súhlas s jej odovzdaním (vrátane spôsobu sprístupnenia)

vedúci práce

Čestné prehlásenie

Čestne prehlasujem, že túto diplomovú prácu som vypracoval samostatne s použitím uvedených zdrojov.

V Bratislave dňa

.....

Bc. Pavel Zábudlý

Pod'akovanie

Na tomto mieste úprimne ďakujem svojmu vedúcemu diplomovej práce, pánovi doc. RNDr. Milošovi Božekovi, CSc. za odborný dohľad, cenné pripomienky a veľkú ochotu, s akou pristupoval k mojej práci. V neposlednom rade chcem poďakovať mojej rodine a priateľom za podporu a pochopenie v období, keď som sa plne venoval diplomovej práci.

Abstrakt

ZÁBUDLÝ, Pavel: *Kotúľanie rovinných a priestorových kriviek* (Diplomová práca). Univerzita Komenského v Bratislave. Fakulta matematiky fyziky a informatiky. Katedra algebry, geometrie a didaktickej matematiky. Vedúci: doc. RNDr. Miloš Božek, CSc. Stupeň odbornej kvalifikácie: Bakalár v odbore Matematika, študijný program: Počítačová grafika a geometria. Bratislava: FMFI UK, 2011. 58s.

Práca sa zaoberá kotúľaním dvoch regulárnych kriviek zadaných parametricky, z ktorých je jedna fixná a druhá sa po nej kotúľa. Hlavný cieľ práce je preskúmať takýto pohyb v rovine a rozšíriť ho do priestoru. V oboch dimenziách analyticky vyjadríme kotúľanie pomocou matíc a softvérovou aplikáciou danú problematiku vizualizujeme.

Kľúčové slová: regulárne krivky, parametrické vyjadrenie kriviek, Frenetov trojhran, pohyb, zhodnosť, zosúladené parametrizácie

Abstract

ZÁBUDLÝ, Pavel: *Rolling of planar and space curves* (Master thesis). Comenius university in Bratislava. Faculty of mathematics, physics and informatics. Department of algebra, geometry and didactic mathematics. Advisor: doc. RNDr. Miloš Božek, CSc. Qualification degree: Bachelor of Mathematics, Study programme: Computer graphics and geometry. Bratislava: FMFI UK, 2011. 58s.

This work deals with rolling of two regular curves specified parametrically, one being fixed and the other rolls on the first. The main objective of this work is to explore this motion in plane and extend it into space. In both dimensions analytically we express rolling by matrixes and with software application we visualize the issue.

Key words: regular curves, curves specified parametrically, Frenet's triangle, motion, identity, harmonize parameterization

Predhovor

Predkladaná diplomová práca preskúma kotúľanie jednej regulárnej krivky po druhej, z nich je prvá fixná a druhá sa kotúľa po nej. Týmto pohybom vzniká nový typ kriviek. Predstavuje iný prístup, než aký sa využíva v literatúre skúmajúcej kotúľanie v rovine doteraz. Na rozdiel od Routtera [7] a Gibsona [4] nevyjadrujeme pohyb ako zloženie posunutia a otočenia, ale pomocou zhodností pre každý moment. Takto definované kotúľanie možno ľahko rozšíriť do priestoru. Práca skúma podmienky, ktoré musia krivky spĺňať, aby sa mohli po sebe kotúľať týmto spôsobom a informuje o pohybe v ľubovoľnej dimenzii. Ukazuje konkrétne typy kotúľania v dvojrozmernom a trojrozmernom priestore. V závere práce sa nachádza aj krátky opis softvérovej aplikácie, ktorá poskytuje obrázky kriviek vzniknutých kotúľaním jednej krivky po druhej.

Obsah

Úvod	10
1 Základné pojmy.....	11
1.1 Teória kriviek.....	11
1.2 Geometrické zobrazenia.....	15
2 Kotúľanie kriviek v rovine.....	18
2.1 Pohyb v euklidovskom priestore.....	18
2.2 Zosúladené parametrizácie dvoch kriviek.....	19
2.3 Vznik kriviek kotúľaním v rovine.....	20
2.4 Rulety	29
3 Kotúľanie kriviek v priestore.....	34
3.1 Pohyb	34
3.2 Vznik kriviek kotúľaním v priestore.....	34
4 Vizualizácia.....	49
4.1 Používateľské prostredie	49
4.2 Realizácia kotúľania kriviek	50
Záver	56
Literatúra.....	57

Zoznam obrázkov

Obr. 2.1 Kotúľanie zvnútra	22
Obr. 2.2 Kotúľanie zvonka	22
Obr. 2.3a Výsledná krivka pre $r = R$ [12]	27
Obr. 2.3b Výsledná krivka pre $r = R$ zostrojená podľa vety 2.12	27
Obr. 2.4a Astroida [12]	28
Obr. 2.4b Astroida zostrojená podľa vety 2.12	28
Obr. 2.5 Kotúľanie reťazovky po reťazovke s parametrami $a_f = 10$, $a_k = 10$ pre kotúľaný bod $(2, 0, 0)$	28
Obr. 2.6 Kotúľanie reťazovky po kružnici s parametrami $r = 4$, $a_k = 10$ pre kotúľaný bod $(0, 8, 0)$	28
Obr. 2.7 Myšlienka rulety	29
Obr. 2.8 Cykloida [12]	31
Obr. 2.9 Skrátená cykloida [12]	31
Obr. 2.10 Predĺžená cykloida [12]	31
Obr. 2.11 Kotúľanie zvonka, kde polomer fixovanej kružnice $r = 3$, polomer kotúľanej kružnice $R = 2$ a kotúľaný bod $b = (r, 0)$ [12]	32
Obr. 2.12 Kotúľanie zvonka, kde polomer fixovanej kružnice $r = 2$, polomer kotúľanej kružnice $R = 2$, kotúľaný bod $b = (r, 0)$ [12]	32
Obr. 2.13 Kotúľanie zvnútra, kde polomer fixovanej kružnice $r = 7$, polomer kotúľanej kružnice $R = 2$ a kotúľaný bod $b = (r, 0)$ [12]	32
Obr. 2.14 Kotúľanie zvnútra, kde polomer fixovanej kružnice $r = 2$, polomer kotúľanej kružnice $R = 7$ a kotúľaný bod $b = (r, 0)$ [12]	32
Obr. 3.1a Kotúľanie zvnútra	37
Obr. 3.2a Kotúľanie zvonka	37
Obr. 3.1b Kotúľanie zvnútra	37
Obr. 3.2b Kotúľanie zvonka	37
Obr. 3.3 Krivka z príkladu 2.13 ako výsledok kotúľania v priestore	45
Obr. 3.4 Astroida ako výsledok kotúľania v priestore	45
Obr. 3.5 Kotúľanie v priestore kružnice po skrutkovici, $r = 2$, $a = 4$, $b = 1$	47
Obr. 3.6 Kotúľanie zvnútra podľa (3.5a), fixná skrutkovica s parametrami $a_f = 4$, $b_f = 0.4$, kotúľaná kružnica $r = 1$, kotúľaný bod $(1, 0, 0)$	48
Obr. 3.7 Kotúľanie zvnútra podľa (3.5a), fixná skrutkovica s parametrami $a_f = 4$, $b_f = 1$, kotúľaná skrutkovica s parametrami $a_k = 2$, $b_k = 0.3$, kotúľaný bod $(2, 0, 0)$	48
Obr. 3.8 Kotúľanie zvonka podľa (3.5c), fixná skrutkovica s parametrami $a_f = 4$, $b_f = 1$, kotúľaná skrutkovica s parametrami $a_k = 2$, $b_k = 0.3$, kotúľaný bod $(3, 0, 0)$	48
Obr. 3.9 Kotúľanie zvonka podľa (3.5c), fixná skrutkovica s parametrami $a_f = 4$, $b_f = 1$, kotúľaná reťazovka s parametrom $a_k = 10$, kotúľaný bod $(0, 10, 0)$	48
Obr. 4.1 Používateľské prostredie	49
Obr. 4.2 Vlastnosť skrutkovice	51

Úvod

Kotúľanie jednej krivky po druhej krivke je oblasť v geometrii, ktorou sa matematici zaoberajú dlhodobo. Prvé poznatky siahajú až do čias antického Grécka. Napriek zaujímavosti tejto problematiky celá dostupná doteraz napísaná literatúra sa zaoberá výlučne kotúľaním dvoch kriviek v rovine, tzv. ruletami. Ide o špeciálnu triedu kriviek, vzniknutých týmto pohybom, ktoré sú jednoznačne vyjadrené analyticky. Presnejšie pod ruletou rozumieme dráhu pohybu bodu spojeného s pohyblivou krivkou, ktorá sa bez prekľzavania kotúľá po druhej krivke. Najznámejšie typy sú cykloidy, pri ktorých sa kotúľá kružnica po priamke, a trochoidy, kde sa kotúľá kružnica po kružnici. V literatúre a na internetových stránkach, zaoberajúcimi sa uvedenou tematikou, sa dopracujeme k mnohým obrázkom a animáciám týchto kriviek. Doterajšia teória nanešťastie nezachytí aj priestorové možnosti pohybu jednej krivky po druhej.

Prístup v tejto práci je rozdielny oproti bežne dostupnej literatúre. Rozdiel spočíva v tom, že využíva vlastnosti pohybu v ľubovoľnej dimenzii a možnosti jednoznačne priradiť jednotkové vektory k bodu krivky. S využitím zhodnosti sa stotožňujú jednotkové vektory fixnej a kotúľanej krivky. Takto definované kotúľanie je viac všeobecné, preto ho možno rozšíriť do trojrozmernej dimenzie. Navyše v oboch dimenziách sa dá ľahko zapísať pomocou matíc.

Práca je rozdelená na štyri kapitoly. V prvej sa zaoberáme základnými pojmami z teórie kriviek a geometrických zobrazení, ktoré budeme najviac používať. Všetky uvedené pojmy sú potrebné na pochopenie a spracovanie danej problematiky. V druhej kapitole sa podrobne pozrieme na kotúľanie v rovine. Povieme si, ako definujeme pohyb a zosúladené parametrizácie kriviek. S využitím zhodnosti analyticky vyjadríme kotúľanie jednej krivky po druhej v rovine pomocou matíc, krivky vzniknuté týmto pohybom, ale aj prinesieme krátky prehľad kotúľania v rovine podľa Ruttera [7] a Gibsona [4]. Tretia kapitola rozširuje doteraz získané vedomosti o kotúľaní v rovine na kotúľanie v priestore. Jej súčasťou je aj analytické vyjadrenie kotúľania v priestore, spolu s analytickým vyjadrením kriviek vzniknutých týmto pohybom. V poslednej štvrtej kapitole opíšeme prostredie a funkcie aplikácie slúžiacej na vizualizáciu. Program slúži na zobrazenie výsledkov štúdie danej problematiky.

1 Základné pojmy

V tejto časti čitateľovi priblížime základné pojmy z oblasti teórie kriviek a geometrických transformácií. Definície sú v rôznej literatúre rovnaké, používame terminológiu z [1, 2, 3, 8, 11], podrobné dôkazy vyslovených viet z teórie kriviek možno nájsť v [1, 3] a z geometrických zobrazení v [2].

1.1 Teória kriviek

Krivkou budeme rozumieť trajektóriu, ktorú opíše pohybujúci sa bod. Krivky môžeme rozdeliť na *rovinné* (všetky body ležia v jednej rovine) a *priestorové* (ak neexistuje rovina, ktorá obsahuje všetky body krivky). Ďalšie možné delenie je na *empirické* (krivka zadaná bez matematickej definície, napr. len grafom) a *matematické* (poznáme ich matematické vyjadrenie) [11].

V počítačovej grafike a geometrii sa krivky v rovine a v priestore najčastejšie zadávajú *parametricky* prostredníctvom *bodovej funkcie jednej (číselnej) premennej*. Je to funkcia, ktorá každému reálnemu číslu z nejakého intervalu číselnej osi priraduje bod v rovine resp. v priestore. Pod pojmom krivka budeme teda rozumieť zobrazenie

$$P: I \rightarrow E^2, \quad \text{resp.} \quad P: I \rightarrow E^3, \quad (1.1)$$

kde I je interval na číselnej osi $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$.

Klasický zápis bodovej funkcie jednej premennej (1.1) je

$$P = P(t), \quad t \in I. \quad (1.2)$$

Hodnotu premennej t v tejto súvislosti nazývame *parametrom* bodu $P(t)$.

V súradniciach vyzerá bodová funkcia jednej premennej takto:

$$P(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I, \quad \text{pre krivku v rovine,}$$

resp.

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I, \quad \text{pre krivku v priestore.}$$

Keď to zhrnieme, krivka je množina bodov spolu s jej parametrickým vyjadrením [1].

Definícia 1.1: Máme krivku $P_1(t)$ zadanú parametricky. Nech $P_1(t_1)$ je bod krivky pre $t_1 \in I$ a $P_1(t_2)$ je bod krivky pre $t_2 \in I$. Pre hodnoty t_1 a t_2 platí $t_1 < t_2$. Krivka je *orientovaná súhlasne* s parametrizáciou, ak platí, že $P_1(t_1)$ je pred bodom $P_1(t_2)$. Ak je bod $P_1(t_2)$ pred bodom $P_1(t_1)$, tak krivka je *orientovaná nesúhlasne* s parametrizáciou. Krivka $P_1(t)$ s jedným z týchto usporiadaní sa nazýva *orientovaná* krivka [8].

Príklady kriviek zadaných parametricky:**Príklad 1.2:** *Priamka:* $P(t) = (a_1 + u_1t, a_2 + u_2t, a_3 + u_3t), t \in \mathbf{R}$ **Príklad 1.3:** *Kružnica:* $P(t) = (rcost, rsint), t \in \langle 0, 2\pi \rangle, r > 0,$ Stred kružnice je v počiatku súradnicovej sústavy a r je hodnota polomeru.**Príklad 1.4:** *Skrutkovica* (priestorová krivka):

$$P(t) = (acost, asint, bt), t \in (-\infty, +\infty), a > 0, b \neq 0.$$

V nasledujúcom odseku používame definície a vety v súlade s [1].

Derivácia bodovej funkcie $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ v momente $t_0 \in I$ je vektor

$$P'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

Od bodovej funkcie $P(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in I$, ktorá parametricky určuje krivku, sa spravidla vyžaduje

- *hladkosť:* existujú derivácie všetkých rádov (t.j. súradnicové funkcie $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ majú derivácie všetkých rádov, teda sú hladké)
- *regulárnosť:* $P'(t) \neq \mathbf{0}$ pre všetky t .

Parametrizáciu krivky $P(t), t \in I$ môžeme zmeniť zavedením novej premennej $u \in J$, kde J je nejaký interval, prostredníctvom substitúcie $t = \varphi(u)$. Nová parametrizácia krivky je

$$Q(u) = P(\varphi(u)), u \in J.$$

Vyžadujeme, aby uvedená substitúcia, teda funkcia $\varphi: J \rightarrow \mathbf{R}$, bola

- *hladá* (čiže existujú derivácie všetkých rádov: $\varphi', \varphi'', \varphi''', \dots$),
- *regulárna* (čiže $\varphi'(u) \neq 0$ pre všetky u),
- *surjektívna* (čiže interval J zobrazuje na interval I).

Pod *singulárnym bodom* krivky rozumieme bod s vlastnosťou $P'(t) = \mathbf{0}$. Bod, ktorý nespĺňa túto vlastnosť nazveme *regulárnym* (čiže bod, pre ktorý platí $P'(t) \neq \mathbf{0}$).*Dotyčnica* krivky v regulárnom bode $P(t_0)$ je priamka určená bodom $P(t_0)$ a vektorom $P'(t_0)$. Vektor $P'(t_0)$ sa nazýva *dotykový vektor* krivky.Pod *normálou* krivky v regulárnom bode rozumieme každú priamku, prechádzajúcu bodom krivky kolmo na dotyčnicu v regulárnom bode. V rovine má každá krivka v každom regulárnom bode práve jednu normálu, v priestore ich má nekonečne veľa. Tieto vyplňajú tzv. *normálovú rovinu* krivky.

Ak sú vektory $P'(t)$ a $P''(t)$ lineárne nezávislé, tak bod $P(t)$ rovinnej či priestorovej krivky nazveme *neinflexný*. Ak sú lineárne závislé, tak bod $P(t)$ je *inflexným* bodom danej krivky.

Oskulačná rovina priestorovej krivky v neinflexnom bode $P(t)$ je rovina určená bodom $P(t)$ a vektormi $P'(t)$ a $P''(t)$.

Hlavná normála je normála priestorovej krivky ležiaca v oskulačnej rovine.

Binormála je normála priestorovej krivky ktorá je na oskulačnú rovinu kolmá.

Jednotkové vektory \mathbf{t} , \mathbf{n} a \mathbf{b} , ktoré ležia postupne na dotyčnici, hlavnej normále a binormále vznikajú ortonormalizačným procesom z vektorov P' , P'' a $P' \times P''$:

$$\mathbf{t} = \frac{P'}{|P'|}, \quad \mathbf{n} = \frac{(P' \cdot P')P'' - (P' \cdot P'')P'}{|(P' \cdot P')P'' - (P' \cdot P'')P'|}, \quad \mathbf{b} = \frac{P' \times P''}{|P' \times P''|}. \quad (1.3)$$

Nazývajú sa *vektor dotyčnice*, *vektor hlavnej normály* a *vektor binormály*.

Alternatívny spôsob výpočtu pre vektor \mathbf{n} je:

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}. \quad (1.4)$$

Ortonormálne vektory \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} , ktoré je možné jednoznačne priradiť ku každému bodu krivky $P(t_0)$ pre $t \in I$, tvoria *Frenetov trojhran* resp. *Frenetov repér* krivky.

Pre krivky v rovine majú zmysel iba prvé dva zo vzorcov (1.3). Podobne ako v priestore, aj tu je k dispozícii výpočtová alternatíva pre vektor \mathbf{n} :

$$\mathbf{t} = P'/|P'|, \quad \mathbf{n} = \text{sgn det}(P', P'') (\perp \mathbf{t}) \quad (1.5)$$

Parametrizácia krivky $P(t)$, $t \in I$ sa nazýva *prirodzená parametrizácia krivky* alebo *parametrizácia krivky oblúkom*, ak pre každý podinterval $\langle a, b \rangle \subset I$ sa dĺžka úseku krivky $P|\langle a, b \rangle$ rovná dĺžke $b - a$ zodpovedajúcej časti definičného oboru parametrizácie (obr. 4.2), t.j. $l(P|\langle a, b \rangle) = b - a$ pre všetky intervaly $\langle a, b \rangle \subset I$.

Veta 1.5: Pre dĺžku $l(P)$ krivky $P(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ platí

$$l(P) = \int_a^b |P'(t)| dt.$$

Veta 1.6: Parametrizácia krivky $P(t)$ je prirodzenou parametrizáciou práve vtedy, keď

$$|P'(t)| = 1 \quad \text{pre všetky } t.$$

Veta 1.7: Nech $P(t)$, $t \in I$ je regulárna parametrizácia krivky a nech $t_0 \in I$ a $s_0 \in \mathbf{R}$ sú ľubovoľné čísla. Potom existuje taká substitúcia $t = \varphi(s)$, $s \in J$, že $s_0 \in J$, $\varphi(s_0) = t_0$ a $Q(s) = P(\varphi(s))$ je prirodzená parametrizácia danej krivky, ktorá krivku orientuje rovnako ako pôvodná parametrizácia (t.j. $\varphi'(s) > 0$ pre všetky s).

Veta 1.8: V blízkosti neinflexného bodu leží rovinná krivka v polrovine určenej dotyčnicou a vektorom normály.

Rovnako môžeme uvažovať o rozložení krivky vzhľadom na neinflexný bod v priestore.

Veta 1.9: V blízkosti neinflexného bodu leží priestorová krivka v polpriestore určenom rektifikačnou rovinou a vektorom hlavnej normály.

Dôkaz: Ku regulárnej krivke existuje podľa vety 1.7 existuje taká substitúcia, že krivka je zadaná prirodzenou parametrizáciou. Skúmame ju v bode $P(0)$. Rektifikačná rovina v ňom má rovnicu $\mathbf{n}(0) \cdot [X - P(0)] = 0$, polpriestor určený rektifikačnou rovinou, v ktorej leží dotyčnica, a vektor hlavnej normály je vyjadrený nerovnicou $\mathbf{n}(0) \cdot [X - P(0)] \geq 0$. Uvažujme nad funkciou $h(s) = \mathbf{n}(0) \cdot [P(s) - P(0)]$, pre ktorú zrejme platí

$$h(0) = \mathbf{n}(0) \cdot [P(0) - P(0)] = 0,$$

$$h'(0) = \mathbf{n}(0) \cdot P'(0) = \mathbf{n}(0) \cdot \mathbf{t}(0) = 0,$$

$$h''(0) = \mathbf{n}(0) \cdot P''(0) = \mathbf{n}(0) \cdot [P''(0)\mathbf{n}(0)] = |P''(0)| \cdot [\mathbf{n}(0) \cdot \mathbf{n}(0)] = |P''(0)| > 0.$$

Funkcia $h(s)$ má teda v bode 0 ostré lokálne minimum rovné 0, preto pre s nenulové, ale blízke nule je kladná. Teda pre s blízke k 0 vyhovujú body $P(s)$ nerovnici $\mathbf{n}(0) \cdot [X - P(0)] \geq 0$, preto ležia v polpriestore, ktorý je určený rektifikačnou rovinou a vektorom hlavnej normály v bode $P(0)$.

Ďalej pokračujeme podľa [1]. Krivky $P_1(t)$ a $P_2(t)$ majú v spoločnom bode $P_1(t_1) = P_2(t_2)$ styk rádu (aspoň) k práve vtedy, keď po prípadnej zmene orientácie jednej krivky a po prechode k prirodzeným parametrizáciám $Q_1(s)$ a $Q_2(s)$ (podľa vety 1.7 pre $s_0 = 0$) platí

$$Q_2^{(i)}(0) = Q_1^{(i)}(0) \text{ pre všetky } i = 0, 1, \dots, k. \quad (1.6)$$

Veta 1.10: (Beta podmienky styku rádu 2) Krivky $P_1(t)$ a $P_2(t)$ majú v spoločnom bode $P_1(t_1) = P_2(t_2)$ styk rádu 2 práve vtedy, keď existujú také čísla β_1 a β_2 , pričom $\beta_1 \neq 0$, že

$$P_2'(t_2) = \beta_1 P_1'(t_1), \quad (1.7a)$$

$$P_2''(t_2) = \beta_1^2 P_1''(t_1) + \beta_2 P_1'(t_1). \quad (1.7b)$$

1.2 Geometrické zobrazenia

V tejto časti si priblížime všeobecnú teóriu geometrických zobrazení podľa [2]. Neskôr budeme používať ich konkrétne podoby.

Definícia 1.11: Zobrazenie $f: A \rightarrow A'$ medzi afinnými priestormi sa nazýva *afinné*, ak pre všetky body $A, B \in A$ a pre všetky čísla $t \in \mathbf{R}$ platí

$$f(A + t(B - A)) = f(A) + t[f(B) - f(A)] \quad (1.8)$$

Ak $A = A'$ a afinné zobrazenie f je bijektívne, hovoríme o *afinnej transformácii* resp. o *afinite* v priestore A .

Veta 1.12: Afinné zobrazenie

- zobrazuje priamku do priamky alebo do jedného bodu,
- zachováva deliaci pomer troch kolineárnych bodov, ak priamku, na ktorej body ležia, zobrazí do priamky,
- zobrazuje úsečku do úsečky alebo do jedného bodu,
- zobrazuje polpriamku do polpriamky alebo do jedného bodu,
- zobrazuje podpriestor do podpriestoru,
- zobrazuje konvexnú množinu do konvexnej množiny.

V afinných priestoroch A^n a A^m sú dané afinné sústavy súradníc a konštanty a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$. Zobrazenie $f: A^n \rightarrow A^m$, ktoré bodu $X = (x_1, \dots, x_n)$ priestoru A^n priradzuje taký bod $Y = (y_1, \dots, y_m)$ z A^m , že

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + a_{10} \\ &\dots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + a_{m0} \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

je afinné. Tieto vzťahy sa nazývajú *rovnice afinného zobrazenia* f .

Maticový zápis afinného zobrazenia. Pracujeme s maticami

$$\mathbf{X} = (x_1 \dots x_n)^\top, \mathbf{Y} = (y_1 \dots y_m)^\top, \mathbf{F} = (a_{ij}), i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \mathbf{F}_0 = (a_{10} \dots a_{m0})^\top.$$

Vtedy je sústava rovností (1.8) ekvivalentná s maticovou rovnosťou

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{F}_0 \quad (1.10)$$

Ak použijeme matice rozšírených súradníc

$$\tilde{\mathbf{X}} = (x_1 \dots x_n \ 1)^\top, \tilde{\mathbf{Y}} = (y_1 \dots y_m \ 1)^\top, \tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{F}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

tak rovnice afinného zobrazenia (1.9) resp. rovnosť (1.10) sa dajú vyjadriť ešte jednoduchšie:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X} \quad (1.12)$$

Hovoríme, že \mathbf{F} je *matica afinného zobrazenia* daného rovnicami (1.9).

Definícia 1.13: Zobrazenie $V(f): V(A) \rightarrow V(A')$, ktoré vektoru $\mathbf{u} = B - A$ priraduje vektor

$$V(f)(\mathbf{u}) = V(f)(B - A) = f(B) - f(A)$$

sa nazýva *vektorová (niekedy homogénna) zložka afinného zobrazenia* f .

Definícia 1.14: *Zhodnostné zobrazenie* je afinné zobrazenie euklidovských priestorov $f: E^n \rightarrow E^m$, také že pre všetky $A, B \in E^n$ platí

$$|f(A) f(B)| = |AB|$$

Zhodnosť je bijektívne zhodnostné zobrazenie $E^n \rightarrow E^n$.

Veta 1.15: Vektorová zložka afinného zobrazenia je lineárne zobrazenie.

Veta 1.16: Pre zhodnostné zobrazenie f a pre všetky vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} platí

a) $|f(\mathbf{u})| = |\mathbf{u}|$

b) $f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

Dôsledok: a) Zhodnostné zobrazenie zachováva kolmosť (dvoch vektorov, dvoch vektorových podpriestorov, dvoch bodových podpriestorov).

b) Zhodnostné zobrazenie zachováva uhly (dvoch vektorov, dvoch priamok, dvoch nadrovin a uhol priamky s nadrovinou).

c) Zhodnostné zobrazenie zachováva vzdialenosti nielen bodov, ale aj podpriestorov.

Veta 1.17: Máme afinné zobrazenie $f: E^n \rightarrow E^m$ s maticovou rovnicou $\mathbf{Y} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{F}_0$ vzhľadom na karteziánske sústavy súradníc v E^n a v E^m . Zobrazenie f je zhodnostné zobrazenie práve vtedy, keď $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{1}_n$.

Dôsledok: Vektorové zložky zhodností sú reprezentované ortogonálnymi maticami.

Poznámka 1.18: Štvorcová matica \mathbf{A} je *ortogonálna*, ak matice $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ a $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T$ sú jednotkové, teda keď $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$.

Na základe predchádzajúceho textu [1, 2] môžeme rovnice (1.9) chápať ako transformáciu aktuálnej sústavy súradníc do novej sústavy súradníc. Potom vo vzťahoch (1.10) a (1.12) matice \mathbf{F}, \mathbf{F}_0 resp. \mathbf{F} reprezentujú prechod od aktuálnej sústavy súradníc k novej sústave súradníc. Prvky matice \mathbf{Y} sú súradnice bodov vzhľadom na novú sústavu súradníc, prvky matice \mathbf{X} sú súradnice bodov vzhľadom na starú sústavu súradníc.

Afinný repér v afinnom priestore A^n je usporiadaná $(n+1)$ -tica $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, P)$, kde $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ je báza vektorovej zložky afinného priestoru A^n a P je jeho bod. Ak je

priestor euklidovský a báza $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ je ortonormálna, tak $(n+1)$ -tica $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, P)$ je karteziánsky repér. Afinný resp. karteziánsky repér určuje afinnú resp. karteziánsku sústavu súradníc.

Každému repéru $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, P)$ môžeme priradiť regulárnu maticu $\mathbf{F}^{\sim}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n, P)$ typu $(n+1, n+1)$, v ktorej stĺpcoch sú rozšírené súradnice vektorov $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ a bodu P .

Príklad 1.19: Pracujme v euklidovskej rovine. Zvolíme si za \mathbf{F}^{\sim} maticu typu $\mathbf{F}^{\sim}(\mathbf{t}, \mathbf{n}, P)$, kde vektory \mathbf{t}, \mathbf{n} sú vektory zo vzťahov (1.3) a P je bod roviny. Táto matica potom vo vzťahu (1.12) reprezentuje zhodnosť, ktorá transformuje repér aktuálnej karteziánskej sústavy súradníc do karteziánskej sústavy súradníc určených repérom $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, P)$.

2 Kotúľanie kriviek v rovine

V tejto kapitole priblížime čitateľovi kotúľanie jednej krivky po druhej v rovine. Povieme si, ako vyjadríme pohyb v rovine, podmienky, ktoré dve krivky musia spĺňať, aby sme ich mohli po sebe kotúľať a ukážeme niekoľko príkladov. Najdôležitejšie pojmy, pohyb a zosúladené parametrizácie, využívame aj v trojrozmernom priestore, preto ich definujeme pre priestory ľubovoľnej dimenzie.

2.1 Pohyb v euklidovskom priestore

Definícia 2.1: Pohyb v n -rozmernom euklidovskom priestore E^n je zobrazenie $\Phi: E^n \times I \rightarrow E^n$, kde I je interval číselnej osi. Pre každé $t \in I$ vzniká zobrazenie $\Phi_t: E^n \rightarrow E^n$, $X \rightarrow \Phi(X, t)$, kde premennú t interpretujeme ako čas. Predpokladáme, že:

1. Zobrazenie Φ je hladké, teda že existujú derivácie všetkých rádov, a všetky tieto derivácie sú spojité.
2. Zobrazenie Φ_t je zhodnosť pre každé $t \in I$ v E^n .

Ide teda o hladký jednoparametrický systém zhodností, ktorý reprezentujeme rovnicami

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 a_{11}(t) + x_2 a_{12}(t) + \dots + x_n a_{1n}(t) + a_{01}(t) \\ &\dots \\ x'_n &= x_1 a_{n1}(t) + x_2 a_{n2}(t) + \dots + x_n a_{nn}(t) + a_{0n}(t) \end{aligned} \right\}, \quad (2.1)$$

kde funkcie $a_{ij}(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, n$, sú funkcie jednej premennej, všetky definované a hladké na intervale I .

Rovnice pohybu majú v rovine maticový tvar

$$\mathbf{X}' = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{F}_0(t), \quad (2.2)$$

kde

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{F}_0(t) = \begin{pmatrix} a_{01}(t) \\ \vdots \\ a_{0n}(t) \end{pmatrix}.$$

Matica $\mathbf{F}(t)$ je ortogonálna.

Tento systém má v rozšírených karteziánskych súradniciach tvar

$$\tilde{\mathbf{X}}' = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{X}} \quad (2.3)$$

po rozpísaní

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) & a_{01}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) & a_{0n}(t) \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pre $n = 2$ majú matice vo vzťahu (2.2) tvar

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_0(t) = \begin{pmatrix} a_{0x}(t) \\ a_{0y}(t) \end{pmatrix}.$$

a v rozšírených karteziánskych súradniciach

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{0x}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{0y}(t) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Špeciálne pre rovinu môžeme rovnice pohybu zapísať prehľadnejšie pomocou goniometrických funkcií

$$x' = x \cos \varphi(t) - y \sin \varphi(t) + a_{0x}(t),$$

$$y' = x \sin \varphi(t) + y \cos \varphi(t) + a_{0y}(t),$$

kde funkcia $\varphi(t)$ je orientovaný uhol rotačnej zložky zhodnosti Φ_t .

2.2 Zosúladené parametrizácie dvoch kriviek

Máme dve krivky $P_1(t)$, $P_2(t)$, $t \in I$. Chceme, aby pri kotúľaní jednej krivky po druhej, parameter $t \in I$ prešiel rovnakú vzdialenosť na oboch krivkách. Inými slovami potrebujeme zabezpečiť, aby dĺžka oblúkov pre každý podinterval $\langle a, b \rangle \subset I$ bola rovnaká, čiže $l(P_1|_{\langle a, b \rangle}) = l(P_2|_{\langle a, b \rangle})$. Potom môžeme vysloviť nasledujúcu definíciu.

Definícia 2.2: Parametrizácie dvoch kriviek $P_1(t)$, $P_2(t)$, $t \in I$ sú *zosúladené*, ak platí, že ich dĺžky na ľubovoľnom podintervale $\langle a, b \rangle \subset I$ sú rovnaké.

Ďalšie skúmanie nám veľmi uľahčí nasledujúca veta.

Veta 2.3: Parametrizácie dvoch kriviek $P_1(t)$, $P_2(t)$, $t \in I$ sú zosúladené práve vtedy, keď platí $|P_1'(t)| = |P_2'(t)|$ pre všetky $t \in I$.

Dôkaz: Dôkaz rozdelíme na dve časti.

„ \Leftarrow “ Nech pre dve krivky platí $|P_1'(t)| = |P_2'(t)|$ a nech $\langle a, b \rangle \subset I$ je ľubovoľný interval.

Potom platí rovnosť $\int_a^b |P_1'(t)| dt = \int_a^b |P_2'(t)| dt$, čiže $l(P_1|_{\langle a, b \rangle}) = l(P_2|_{\langle a, b \rangle})$.

Opačne. „ \Rightarrow “ Nech parametrizácie dvoch kriviek sú zosúladené. Zvoľme konštantu $a \in I$. Z definície 2.2 vyplýva, že $\int_a^t |P_1'(u)| du = \int_a^t |P_2'(u)| du$ pre všetky $t \in I$. Po zderivovaní podľa t dostaneme $|P_1'(t)| = |P_2'(t)|$ pre všetky $t \in I$. \square

Poznámka 2.4: Z Vety 2.2 je zrejmé, že prirodzené parametrizácie ľubovoľných dvoch kriviek sú zosúladené.

Teraz si ukážeme príklady kedy dve parametrizácie kriviek sú a nie sú zosúladené.

Príklad 2.5: Nech $P_1(t) = (t, 0)$, $t \in I$ je priamka a nech $P_2(t) = (r \sin t, r \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ je kružnica. Potom pre ich prvé derivácie platí $P_1'(t) = (1, 0)$ a $P_2'(t) = (r \cos t, r(-\sin t))$. Z toho pre $r \neq 1$ vyplýva, že $|P_1'(t)| \neq |P_2'(t)|$, lebo $|P_1'(t)| = 1$, $|P_2'(t)| = r$. Parametrizácie kriviek *nie* sú zosúladené.

Príklad 2.6: Opäť majme priamku a kružnicu. Tentoraz zvolíme ich parametrizácie tak, aby boli zosúladené. Nech $P_1(t) = (-rt, 0)$, $t \in I$ a $P_2(t) = (-r \sin t, r - r \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Potom $P_1'(t) = (-r, t)$ a $P_2'(t) = (-r \cos t, r \sin t)$. Platí rovnosť $|P_1'(t)| = |P_2'(t)|$, lebo $|P_1'(t)| = r$, $|P_2'(t)| = r$. Parametrizácie kriviek sú zosúladené.

2.3 Vznik kriviek kotúľaním v rovine

Budeme pracovať s dvomi krivkami zadanými parametricky $P_1(t) = (P_{1x}(t), P_{1y}(t))$, $P_2(t) = (P_{2x}(t), P_{2y}(t))$, $t \in I$. Obmedzíme sa na kotúľanie bez prekĺzavania a krivky bez inflexných bodov. Vektory zodpovedajúcich Frenetových repérov označíme $\mathbf{t}_1(t)$, $\mathbf{n}_1(t)$ pre krivku $P_1(t)$ a $\mathbf{t}_2(t)$, $\mathbf{n}_2(t)$ pre krivku $P_2(t)$.

Definícia 2.7: $P_1(t)$, $P_2(t)$, $t \in I$ sú parametrizácie dvoch kriviek v rovine. Kotúľanie krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$ je taký pohyb $\Phi: E^2 \times I \rightarrow E^2$, že pre všetky $t \in I$ platí

- (i) $\Phi_t(P_2(t)) = P_1(t)$,
- (ii) $\Phi_t(P_2'(t)) = P_1'(t)$.

Keďže Φ_t je zhodnosť, teda špeciálny prípad afinného zobrazenia, tak vektor $\Phi_t(P_2'(t))$ je obraz vektora $P_2'(t)$ vo vektorovej zložke afinného zobrazenia Φ_t . Zobrazenie Φ má nasledujúce vlastnosti.

Veta 2.8: (Vlastnosti kotúľania) Nech Φ je kotúľanie krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$. Potom platí

1. $P_1(t), P_2(t), t \in I$ sú zosúladené parametrizácie.
2. $\Phi_t(\mathbf{t}_2(t)) = \mathbf{t}_1(t)$ pre všetky $t \in I$
3. $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = \mathbf{n}_1(t)$ pre všetky $t \in I$ alebo $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = -\mathbf{n}_1(t)$ pre všetky $t \in I$

Dôkaz:

1. Ak Φ je kotúľanie kriviek podľa definície 2.6, tak podľa podmienky (ii) zobrazenie Φ_t zobrazuje vektor $P_2'(t)$ na vektor $P_1'(t)$, navyše je to zhodnosť, tak podľa dôsledku vety 1.15 zachováva aj veľkosť vektorov, $|\Phi_t(P_2'(t))| = |P_2'(t)|$. Potom rovnosť $|P_1'(t)| = |P_2'(t)|$ pre $t \in I$ platí. Preto parametrizácie kriviek $P_1(t), P_2(t)$ sú podľa vety 2.2 zosúladené.

2. Parametrizácie kriviek $P_1(t), P_2(t)$ sú podľa vlastnosti 1 zosúladené a pre vektory $P_1'(t), P_2'(t)$ platí podľa definície 2.6 (ii) $\Phi_t(P_2'(t)) = P_1'(t)$. Keďže vektory $\mathbf{t}_1(t), \mathbf{t}_2(t)$ vznikajú z vektorov $P_1'(t), P_2'(t)$ podľa (1.3) tak platí $\Phi_t(\mathbf{t}_2(t)) = \mathbf{t}_1(t)$ pre všetky $t \in I$.

3. Treba si uvedomiť, že zhodnosť zachováva kolmosť dvoch vektorov. Vektory $\mathbf{t}_2(t), \mathbf{n}_2(t)$ sú navzájom na seba kolmé, potom aj $\Phi_t(\mathbf{t}_2(t)) \perp \Phi_t(\mathbf{n}_2(t))$, lebo Φ_t je zhodnosť. Z tvrdenia 2 potom pre všetky $t \in I$ vyplýva $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = \mathbf{n}_1(t)$ alebo $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = -\mathbf{n}_1(t)$. Uvažujme teraz nad funkciou $f(t) = \Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) \cdot \mathbf{n}_1(t)$ ako nad skalárnym súčinom vektorov. Vektory $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t))$ a $\mathbf{n}_1(t)$ sú jednotkové, totožné alebo navzájom opačné, preto funkcia $f(t) = 1$ alebo $f(t) = -1$. Z vlastností skalárneho súčinu (spojitosť, lineárnosť) vyplýva, že pre všetky $t \in I$ nastane buď situácia $f(t) = 1$ alebo pre všetky $t \in I$ nastane situácia $f(t) = -1$.

Dôsledok: Pre každé $t_0 \in I$ majú krivky $P_1(t), t \in I$ a $\Phi_{t_0}(P_2(t)), t \in I$ styk rádu 1 v bode $P_1(t_0)$.

Vlastnosť 2 z vety 2.7 hovorí o spoločnej dotyčnici v spoločnom bode $\Phi_{t_0}(P_2(t_0)) = P_1(t_0)$, pre $t_0 \in I$. Pre rovinu máme dva typy kotúľania vzhľadom na túto dotyčnicu.

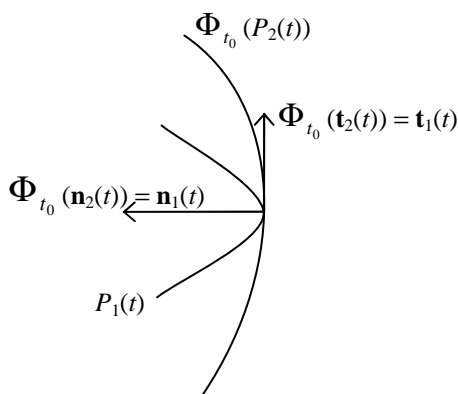
Definícia 2.9: Ak sa krivka $P_2(t)$ kotúľa po krivke $P_1(t)$ tak, že pre všetky $t_0 \in I$ ležia obe krivky $P_1(t)$ a $\Phi_{t_0}(P_2(t))$ lokálne v jednej polrovine vzhľadom na spoločnú dotyčnicu v bode $\Phi_{t_0}(P_2(t_0)) = P_1(t_0)$, hovoríme o kotúľaní *zvnútra*. Ak ležia krivky $P_1(t)$ a $\Phi_{t_0}(P_2(t))$ v lokálne opačných polrovinách, hovoríme o kotúľaní *zvonka*.

Na kotúľanie zvnútra resp. zvonka sa môžeme pozrieť aj inak.

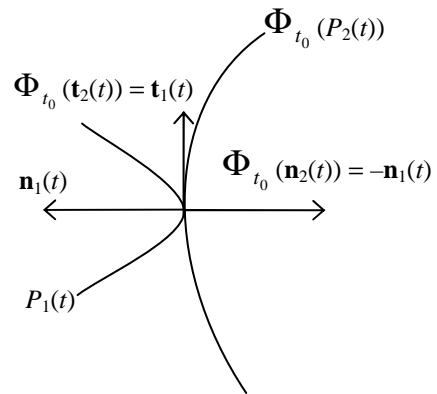
Veta 2.10: Nech Φ je kotúľanie krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$. Potom Φ je kotúľanie zvnútra práve vtedy, keď $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = \mathbf{n}_1(t)$ pre všetky $t \in I$ a kotúľanie zvonka práve vtedy, keď $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = -\mathbf{n}_1(t)$ pre všetky $t \in I$.

Dôkaz: „ \Leftarrow “ Nech $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = \mathbf{n}_1(t)$, potom zhodnosť Φ_t zobrazí vektor $\mathbf{n}_2(t)$ do rovnakej polroviny vzhľadom na spoločnú dotyčnicu, v ktorej leží $\mathbf{n}_1(t)$. V opačnom prípade zhodnosť Φ_t zobrazí vektor $\mathbf{n}_2(t)$ do opačnej polroviny. Keďže podľa vety 1.8 v blízkosti neinflexného bodu leží rovinná krivka v polrovine určenej dotyčnicou a vektorom normály, tak veta 2.10 spĺňa podmienku definície 2.9 pre kotúľanie zvnútra resp. zvonka.

Naopak „ \Rightarrow “ Ak hovoríme o kotúľaní zvnútra, tak krivky $P_1(t)$ a $\Phi_{t_0}(P_2(t))$ ležia v lokálne jednej polrovine. Opäť podľa vety 1.8 platí potom, že $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = \mathbf{n}_1(t)$ pre všetky t . Pre kotúľanie zvonka podľa tej istej vety platí pre všetky t $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = -\mathbf{n}_1(t)$.



Obr. 2.1 Kotúľanie zvnútra



Obr. 2.2 Kotúľanie zvonka

Majme dve krivky $P_1(t)$, $P_2(t)$ a pohyb Φ_t , $t \in I$ podľa definície 2.1 pre $n = 2$.

Veta 2.11: Nech parametrizácie kriviek $P_1(t)$, $P_2(t)$, $t \in I$ sú zosúladené a pre zobrazenie Φ platí

1. $\Phi_t(P_2(t)) = P_1(t)$ pre všetky $t \in I$
2. $\Phi_t(\mathbf{t}_2(t)) = \mathbf{t}_1(t)$ pre všetky $t \in I$

Potom Φ je kotúľanie krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$.

Dôkaz : Podmienka 1 je ekvivalentná podmienke (i) z definície 2.6, preto sa bližšie pozriem na druhú podmienku. Vektory $\mathbf{t}_1(t)$, $\mathbf{t}_2(t)$ dostávame z $P_1(t)$, $P_2(t)$ podľa (1.3). Vektorová zložka zobrazenia Φ je lineárne zobrazenie a pre lineárne zobrazenie platí $\Phi_t(c\mathbf{v}) = c\Phi_t(\mathbf{v})$. Zlomok $1/|P_2'(t)|$ si označme ako c a $1/|P_1'(t)|$ ako b . Potom platí $\Phi_t(\mathbf{t}_2(t)) = \Phi_t(P_2'(t)/|P_2'(t)|) = \Phi_t(cP_1'(t)) = c\Phi_t(P_1'(t))$, $\mathbf{t}_1(t) = P_1'(t)/|P_1'(t)| = bP_1'(t)$ a z podmienky 1 dostávame rovnosť $c\Phi_t(P_1'(t)) = bP_1'(t)$. Keďže parametrizácie kriviek $P_1(t)$, $P_2(t)$ sú zosúladené, tak podľa vety 2.3 platí $|P_1'(t)| = |P_2'(t)|$, teda $c = b$. Z toho vyplýva, že platí podmienka (ii) z definície 2.6.

Nasledujúcu dôsledok priamo vyplýva z vety 2.11 a vety 2.8.

Dôsledok: $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = \mathbf{n}_1(t)$ pre všetky $t \in I$ alebo $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = -\mathbf{n}_1(t)$ pre všetky $t \in I$.

Ďalej budeme kvôli jednoduchosti písať namiesto $P_1(t) = (P_{1x}(t), P_{1y}(t))$ skráteno iba $P_1(t) = (P_{1x}, P_{1y})$, rovnako aj pre vektory $\mathbf{t}_1(t) = (t_{1x}, t_{1y})$, $\mathbf{n}_1(t) = (n_{1x}, n_{1y})$. Analogicky aj pre $P_2(t)$, $\mathbf{t}_2(t)$, $\mathbf{n}_2(t)$.

Kotúľanie krivky budujeme pomocou jednoparametrického systému zhodností. Pracujeme v rozšírenej karteziánskej sústave súradníc. Chceme, aby pri kotúľaní dvoch kriviek pre bod, v ktorom sa dotýkajú, platili v každom momente $t \in I$ rovnosti

$$\mathbf{F}_1^{\sim}(\mathbf{t}_1(t), \mathbf{n}_1(t), P_1(t)) = \mathbf{F}_2^{\sim}(\mathbf{t}_2(t), \mathbf{n}_2(t), P_2(t))$$

resp. $\mathbf{F}_1^{\sim}(\mathbf{t}_1(t), \mathbf{n}_1(t), P_1(t)) = \mathbf{F}_2^{\sim}(\mathbf{t}_2(t), -\mathbf{n}_2(t), P_2(t))$ tak ide o kotúľanie zvonka.

Označíme si $\mathbf{F}_1^{\sim}(t) = \mathbf{F}_1^{\sim}(\mathbf{t}_1(t), \mathbf{n}_1(t), P_1(t))$ a $\mathbf{F}_{2+}^{\sim}(t) = \mathbf{F}_2^{\sim}(\mathbf{t}_2(t), \mathbf{n}_2(t), P_2(t))$

resp. $\mathbf{F}_{2-}^{\sim}(t) = \mathbf{F}_2^{\sim}(\mathbf{t}_2(t), -\mathbf{n}_2(t), P_2(t))$.

Matica $\mathbf{F}_1^{\sim}(t)$ má tvar

$$\mathbf{F}_1^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} t_{1x} & n_{1x} & P_{1x} \\ t_{1y} & n_{1y} & P_{1y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a $\mathbf{F}_{2+}^{\sim}(t)$ resp. $\mathbf{F}_{2-}^{\sim}(t)$

$$\mathbf{F}_{2+}^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} t_{2x} & n_{2x} & P_{2x} \\ t_{2y} & n_{2y} & P_{2y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{F}_{2-}^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} t_{2x} & -n_{2x} & P_{2x} \\ t_{2y} & -n_{2y} & P_{2y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticovú reprezentáciu $\mathbf{M}^{\sim}(t)$ zhodnosti Φ_t , ktorá vyjadruje kotúľanie krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$ zvnútra resp. zvonka hľadáme nasledovne

$$\mathbf{M}_+^{\sim}(t) \cdot \mathbf{F}_{2+}^{\sim}(t) = \mathbf{F}_1^{\sim}(t) \quad (2.4a)$$

$$\text{resp.} \quad \mathbf{M}_+^{\sim}(t) \cdot \mathbf{F}_{2-}^{\sim}(t) = \mathbf{F}_1^{\sim}(t) \quad (2.4b)$$

$$\mathbf{M}_-^{\sim}(t) = \mathbf{F}_1^{\sim}(t) \cdot \mathbf{F}_{2+}^{\sim}(t)^{-1} \quad (2.5a)$$

$$\text{resp.} \quad \mathbf{M}_-^{\sim}(t) = \mathbf{F}_1^{\sim}(t) \cdot \mathbf{F}_{2-}^{\sim}(t)^{-1} \quad (2.5b)$$

Inverznú maticu k $\mathbf{F}_{2+}^{\sim}(t_2(t), \mathbf{n}_2(t), P_2(t))$ resp. $\mathbf{F}_{2-}^{\sim}(t_2(t), -\mathbf{n}_2(t), P_2(t))$ hľadáme pomocou determinantnov.

$$\det \mathbf{F}_{2+}^{\sim}(t) = \begin{vmatrix} t_{2x} & n_{2x} & P_{2x} \\ t_{2y} & n_{2y} & P_{2y} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = t_{2x}n_{2y} - t_{2y}n_{2x}$$

resp.

$$\det \mathbf{F}_{2-}^{\sim}(t) = \begin{vmatrix} t_{2x} & -n_{2x} & P_{2x} \\ t_{2y} & -n_{2y} & P_{2y} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -t_{2x}n_{2y} + t_{2y}n_{2x}$$

Označíme si $\det \mathbf{F}_{2+}^{\sim}(t) = D_+$

$$\mathbf{F}_{2+}^{\sim}(t)^{-1} = \frac{1}{D_+} \begin{pmatrix} n_{2y} & -n_{2x} & n_{2x}P_{2y} - n_{2y}P_{2x} \\ -t_{2y} & t_{2x} & -t_{2x}P_{2y} + t_{2y}P_{2x} \\ 0 & 0 & t_{2x}n_{2y} - n_{2x}t_{2y} \end{pmatrix}$$

resp. $\det \mathbf{F}_{2-}^{\sim}(t) = D_-$

$$\mathbf{F}_{2-}^{\sim}(t)^{-1} = \frac{1}{D_-} \begin{pmatrix} -n_{2y} & n_{2x} & -n_{2x}P_{2y} + n_{2y}P_{2x} \\ -t_{2y} & t_{2x} & -t_{2x}P_{2y} + t_{2y}P_{2x} \\ 0 & 0 & -t_{2x}n_{2y} + n_{2x}t_{2y} \end{pmatrix}.$$

Výsledný tvar matice $\mathbf{M}_+^{\sim}(t)$ resp. $\mathbf{M}_-^{\sim}(t)$, ktorá reprezentuje kotúľanie krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$ zvnútra resp. zvonka

$$\mathbf{M}_+^{\sim}(t) = \frac{1}{D_+} \begin{pmatrix} t_{1x}n_{2y} - n_{1x}t_{2y} & -t_{1x}n_{2x} + t_{2x}n_{1x} & t_{1x}n_{2x}P_{2y} - t_{1x}n_{2y}P_{2x} - n_{1x}t_{2x}P_{2y} + n_{1x}t_{2y}P_{2x} + P_{1x}t_{2x}n_{2y} - P_{1x}t_{2y}n_{2x} \\ t_{1y}n_{2y} - n_{1y}t_{2y} & -t_{1y}n_{2x} + t_{2x}n_{1y} & t_{1y}n_{2x}P_{2y} - t_{1y}n_{2y}P_{2x} - n_{1y}t_{2x}P_{2y} + n_{1y}t_{2y}P_{2x} + P_{1y}t_{2x}n_{2y} - P_{1y}t_{2y}n_{2x} \\ 0 & 0 & t_{2x}n_{2y} - t_{2y}n_{2x} \end{pmatrix}$$

resp.

$$\mathbf{M}_-^{-1}(t) = \frac{1}{D_-} \begin{pmatrix} -t_{1x}n_{2y} - n_{1x}t_{2y} & t_{1x}n_{2x} + t_{2x}n_{1x} & -t_{1x}n_{2x}P_{2y} + t_{1x}n_{2y}P_{2x} - n_{1x}t_{2x}P_{2y} + n_{1x}t_{2y}P_{2x} - P_{1x}t_{2x}n_{2y} + P_{1x}t_{2y}n_{2x} \\ -t_{1y}n_{2y} - n_{1y}t_{2y} & t_{1y}n_{2x} + t_{2x}n_{1y} & -t_{1y}n_{2x}P_{2y} + t_{1y}n_{2y}P_{2x} - n_{1y}t_{2x}P_{2y} + n_{1y}t_{2y}P_{2x} - P_{1y}t_{2x}n_{2y} + P_{1y}t_{2y}n_{2x} \\ 0 & 0 & -t_{2x}n_{2y} + t_{2y}n_{2x} \end{pmatrix}.$$

Po týchto výpočtoch môžeme vysloviť nasledujúcu vetu.

Veta 2.12: Nech $P_1(t), P_2(t), t \in I$ sú zosúladené parametrizácie dvoch kriviek. Potom

$$\mathbf{M}_+^{-1}(t) = \mathbf{F}_1^{-1}(t) \cdot \mathbf{F}_{2+}^{-1}(t)^{-1} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{M}_-^{-1}(t) = \mathbf{F}_1^{-1}(t) \cdot \mathbf{F}_{2-}^{-1}(t)^{-1}$$

je maticová reprezentácia kotúľania krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$ zvnútra resp. zvonka.

Dôkaz: Matica $\mathbf{M}_+^{-1}(t)$ reprezentuje zobrazenie Φ , ktoré spĺňa podmienky vety 2.11, lebo transformuje Frenetov repér krivky $P_2(t)$ v každom momente $t \in I$ do Frenetovho repéra krivky $P_1(t)$ a teda ide o kotúľanie krivky zvnútra. Analogicky aj pre kotúľanie zvonka.

Parametrické vyjadrenie krivky $P_3(t)$, ktorá vznikne pohybom bodu $X \in E^2$ pri kotúľaní krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$ zvnútra resp. zvonka, dostaneme ako

$$\mathbf{P}_3^{-1}(t) = \mathbf{M}_+^{-1}(t) \cdot \mathbf{X}^{-1} \quad \text{resp.} \quad \mathbf{P}_3^{-1}(t) = \mathbf{M}_-^{-1}(t) \cdot \mathbf{X}^{-1} \quad (2.6)$$

kde matica \mathbf{X}' reprezentuje body krivky vzniknutej pomocou kotúľania a matica \mathbf{X}^{-1} obsahuje rozšírené súradnice kotúľaného bodu.

Poznámka 2.13: Treba si uvedomiť, že transformačné matice $\mathbf{M}_+^{-1}(t), \mathbf{M}_-^{-1}(t)$ nezobrazujú len krivku $P_2(t)$, ale spolu s ňou aj bod X . Teda bod X je viazaný na súradnicovú sústavu, v ktorej definujeme krivku $P_2(t)$.

V nerozšírenej sústave súradníc je kotúľanie Φ_t zložením dvoch zobrazení. Ide o posunutie o vektor $P_1(t) - P_2(t)$ a otočenie so stredom $P_1(t)$ o uhol $\varphi(t)$. Zložením týchto zobrazení dostane podmienky pre kotúľanie dvoch kriviek zvnútra, alebo zvonka.

Teda kotúľanie $\Phi_t = r_{P_1(t), \varphi(t)} \circ t_{P_1(t) - P_2(t)}$.

Po rozpísaní dostávame výsledok

$$x' = x \cos \varphi(t) - y \sin \varphi(t) + P_{1x} - P_{2x} \cos \varphi(t) + P_{2y} \sin \varphi(t)$$

$$y' = x \sin \varphi(t) + y \cos \varphi(t) + P_{1y} - P_{2x} \sin \varphi(t) - P_{2y} \cos \varphi(t)$$

V maticovom tvare

$$\mathbf{X}' = \mathbf{M}(t) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{M}_0(t), \quad (2.7)$$

kde

$$\mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_0(t) = \begin{pmatrix} P_{1x} - P_{2x} \cos \varphi(t) + P_{2y} \sin \varphi(t) \\ P_{1y} - P_{2x} \sin \varphi(t) - P_{2y} \cos \varphi(t) \end{pmatrix}.$$

Príklad 2.14: Kotúľajme dve kružnice s rôznym polomerom zvonka

$$P_1(t) = (r \cos t, r \sin t), \text{ pre } t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$P_2(t) = (R \cos(rt/R), R \sin(rt/R)), \text{ pre } t \in \langle 0, 2\pi r/R \rangle.$$

Ľahko nahliadneme, že ich parametrizácie sú zosúladené. Ďalej máme

$$\mathbf{t}_1(t) = (-\sin t, \cos t), \quad \mathbf{t}_2(t) = (-\sin(rt/R), \cos(rt/R)),$$

$$\mathbf{n}_1(t) = (-\cos t, -\sin t), \quad \mathbf{n}_2(t) = (-\cos(rt/R), -\sin(rt/R)).$$

Potom

$$\mathbf{F}_1^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t & r \cos t \\ \cos t & -\sin t & r \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_2^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(rt/R) & \cos(rt/R) & R \cos(rt/R) \\ \cos(rt/R) & \sin(rt/R) & R \sin(rt/R) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

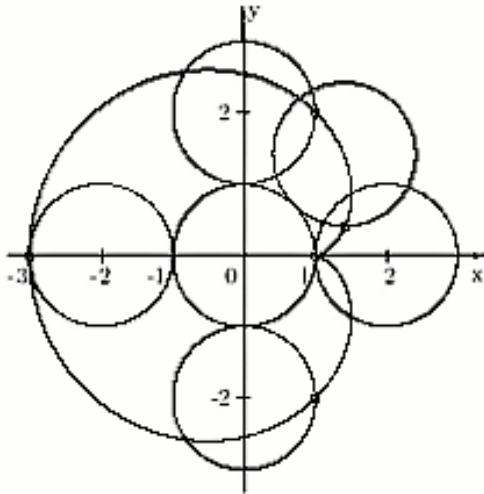
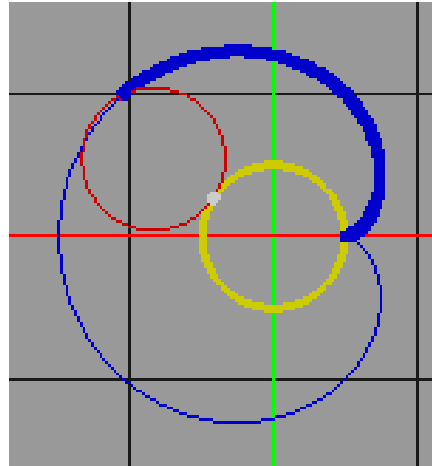
$$\mathbf{M}^{\sim}(t) = \frac{1}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(t + \frac{rt}{R}\right) & \sin\left(t + \frac{rt}{R}\right) & -R \cos t - r \cos t \\ \sin\left(t + \frac{rt}{R}\right) & -\cos\left(t + \frac{rt}{R}\right) & -R \sin t - r \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pre kotúľaný bod $\mathbf{X}^{\sim} = (r, 0, 1)$, po dosadení do (2.6) dostávame

$$\mathbf{P}_3^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} -r \cos\left(t + \frac{rt}{R}\right) + R \cos t + r \cos t \\ -r \sin\left(t + \frac{rt}{R}\right) + R \sin t + r \sin t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R+r) \cos t - r \cos\left(\frac{r+R}{R}t\right) \\ (R+r) \sin t - r \sin\left(\frac{r+R}{R}t\right) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ak si zvolíme $r = R$, výsledná krivka má tvar

$$\mathbf{P}_3^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} r(2 \cos t - \cos 2t) \\ r(2 \sin t - \sin 2t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$


 Obr. 2.3a Výsledná krivka pre $r = R$ [12]

 Obr. 2.3b Výsledná krivka pre $r = R$ zosťrožená podľa vety 2.12

Príklad 2.15: Kotúľajme dve kružnice zvnútra

$$P_1(t) = (R \cos(rt/R), R \sin(rt/R)), \text{ pre } t \in \langle 0, 2\pi r/R \rangle.$$

$$P_2(t) = (r \cos t, r \sin t), \text{ pre } t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

Z toho vyplýva

$$\mathbf{t}_1(t) = (-\sin(rt/R), \cos(rt/R)), \quad \mathbf{t}_2(t) = (-\sin t, \cos t),$$

$$\mathbf{n}_1(t) = (-\cos(rt/R), -\sin(rt/R)), \quad \mathbf{n}_2(t) = (-\cos t, -\sin t).$$

Potom

$$\mathbf{F}_1^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(rt/R) & -\cos(rt/R) & R \cos(rt/R) \\ \cos(rt/R) & -\sin(rt/R) & R \sin(rt/R) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

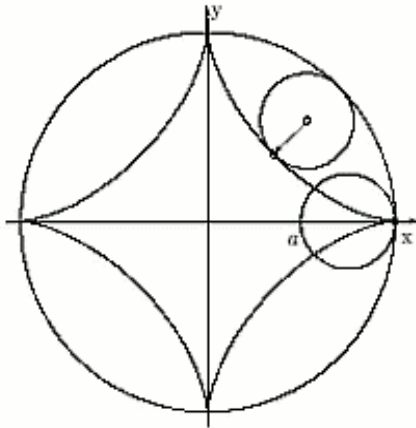
$$\mathbf{F}_2^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t & r \cos t \\ \cos t & -\sin t & r \sin t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_+^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{rt}{R} - t\right) & \sin\left(t - \frac{rt}{R}\right) & R \cos(rt/R) - r \cos(rt/R) \\ \sin\left(\frac{rt}{R} - t\right) & \cos\left(t - \frac{rt}{R}\right) & R \sin(rt/R) - r \sin(rt/R) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

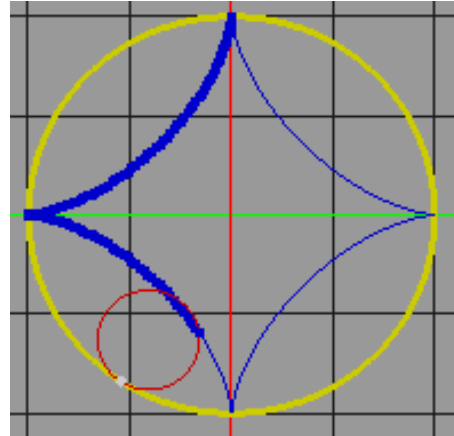
Nech náš kotúľaný bod je $\mathbf{X}^{\sim} = (r, 0, 1)$, po dosadení do (2.6) dostávame

$$\mathbf{P}_3^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} r \cos\left(\frac{rt}{R} - t\right) + R \cos(rt/R) - r \cos(rt/R) \\ r \sin\left(\frac{rt}{R} - t\right) + R \sin(rt/R) - r \sin(rt/R) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pre $r = R/4$ dostávame krivku známu ako *astroida* na Obr. 2.4a a Obr. 2.4b.

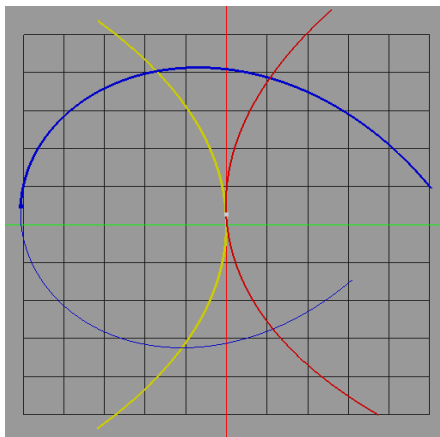


Obr. 2.4a Astroida [12]

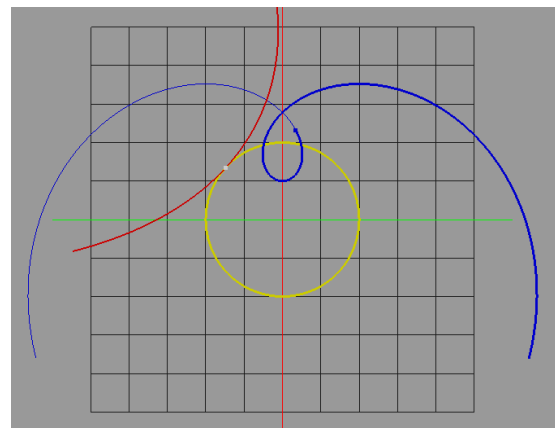


Obr. 2.4b Astroida
zostrožená podľa vety 2.12

Na Obr. 2.5 a Obr. 2.6 máme ďalšie príklady kriviek vzniknutých podľa vety 2.12.



Obr. 2.5 Kotúľanie reťazovky po reťazovke
s parametrami $a_f = 10$, $a_k = 10$ pre kotúľaný
bod $(2, 0, 0)$



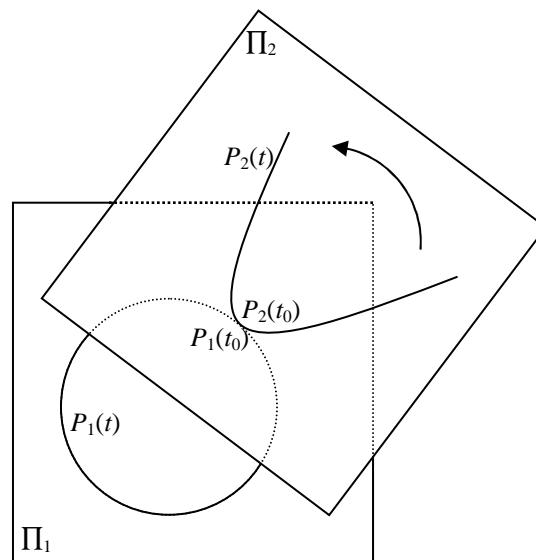
Obr. 2.6 Kotúľanie reťazovky po kružnici
s parametrami $r = 4$, $a_k = 10$ pre kotúľaný
bod $(0, 8, 0)$

Doterajšie postupy predpokladajú, že krivky nemajú inflexné body. Nemožno ich teda použiť napríklad vtedy, keď jednou z uvažovaných kriviek je priamka. Toto obmedzenie by sa odstránilo, ak by sme pri oboch krivkách namiesto vektora normály \mathbf{n} použili vektor orientovanej normály \mathbf{n}_{or} , pozri [4]. Keďže hlavným záujmom diplomo-

vej práce je kotúľanie v priestore, neuberali sme sa týmto smerom z dôvodu, že v priestore takáto možnosť nie je.

2.4 Rulety

Ukážeme si trochu iný prístup pre kotúľanie jednej krivky po druhej v rovine, tento sa používa v literatúre [4, 6, 7] a nám slúži na kontrolu výsledkov. Majme teda zadané parametricky dve krivky $P_1(t)$ a $P_2(t)$. Krivka $P_1(t)$ je definovaná vo *fixovanej* rovine Π_1 a krivka $P_2(t)$ je definovaná v *pohybujúcej sa* rovine Π_2 . Pred začiatkom kotúľania sa obe krivky dotýkajú spoločnom štartovacom bode $P_1(t_0) = P_2(t_0)$ a v tomto bode majú spoločnú dotyčnicu. Krivky $P_1(t)$ a $P_2(t)$ majú na intervale $\langle t_0, t \rangle$ rovnakú dĺžku pre všetky $t \in I$, čiže $\int_{t_0}^t |P_1'(u)| du = \int_{t_0}^t |P_2'(u)| du$. Potom krivku $P_2(t)$ môžeme kotúľať pozdĺž krivky $P_1(t)$ bez prekĺzavania vid' Obr. 2.5.



Obr. 2.7 Myšlienka rulety

V pohybujúcej sa rovine Π_2 si zvolíme sledovaný bod b . Stopovaním bodu b pri kotúľaní pohybujúcej sa roviny Π_2 získame náčrt rulety. Pod pojmom ruleta budeme rozumieme nasledujúcu definíciu.

Definícia 2.16: Ruleta je krivka vytvorená kotúľaním fixovaného bodu z pohybujúcej sa roviny Π_2 v pevnej rovine Π_1 . Pohyb je určený kotúľajúcou sa krivkou $P_2(t)$ z roviny Π_2 po krivke $P_1(t)$ z roviny Π_1 , bez prekĺzavania [7].

Definícia 2.17: Parametrizácie dvoch kriviek $P_1(t)$ a $P_2(t)$ sú *porovnateľné*, ak v každom okamihu počas kotúľania majú dva body, ktoré sú v kontakte (body, v ktorých sa navzájom dotýkajú krivky P_1, P_2), rovnakú hodnotu parametra t [7].

Veta 2.18: Regulárne hladké parametrizácie kriviek $P_1: t \rightarrow (x_1(t), y_1(t))$

a $P_2: t \rightarrow (x_2(t), y_2(t))$ sú porovnateľné ak platí

a) sú súhlasné v štartovacom bode

$$P_1(t_0) = P_2(t_0)$$

b) ich dotykové vektory v štartovacom bode sú totožné

$$P_1'(t_0) = P_2'(t_0)$$

c) $|P_1'(t)| = |P_2'(t)| \neq 0$ pre každé t .

Dôkaz: Prvé dve podmienky hovoria o dobre definovanej štartovacej pozícii, čiže spoločnom štartovacom bode a totožných dotykových vektoroch. Tretia podmienka zaručuje, že obe krivky majú dobre definovaný dotykový vektor a je nenulový pre ľubovoľné t . Ďalej platí, že dĺžky kriviek sú rovnaké na intervale $\langle t_0, t \rangle$, lebo

$$\int_{t_0}^t |P_1'(u)| du = \int_{t_0}^t |P_2'(u)| du \quad [7].$$

Veta 2.19: Rovnica rulety opísanej bodom b ležiacom v pohybujúcej sa rovine Π_2 je

$$C(t) = P_1(t) + \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{pmatrix} (b - P_2(t)), \quad (2.8)$$

kde matica $\begin{pmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{pmatrix}$ je matica otočenia a $\varphi(t)$ je orientovaný uhol medzi

vektormi $P_1'(t), P_2'(t)$, ktorý je vyjadrený vzhľadom na fixovanú rovinu Π_1 . Výsledná ruleta $C(t)$ leží v rovine Π_1 [7].

Poznámka 2.20: Pre orientovaný uhol $\varphi(t)$ dvoch nenulových vektorov $P_1'(t), P_2'(t)$ platí

$$\cos \varphi(t) = \frac{P_1'(t) \cdot P_2'(t)}{|P_1'(t)| |P_2'(t)|}, \quad \sin \varphi(t) = \frac{\det(P_1'(t), P_2'(t))}{|P_1'(t)| |P_2'(t)|}, [1].$$

Niektoré typy ruliet [6]

1. Cykloidy: Kotúľanie kružnice po priamke

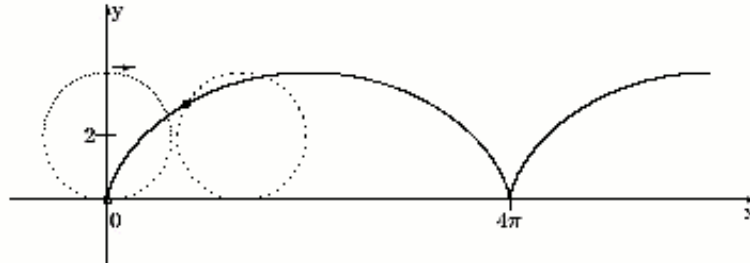
Rovnica cykloidy podľa (2.8) je

$$C(t) = \begin{pmatrix} r(r - \sin t) + b_x \cos t + b_y \sin t \\ r(1 - \cos t) - b_x \sin t + b_y \cos t \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

V závislosti od voľby kotúľaného bodu b máme tri typy kriviek:

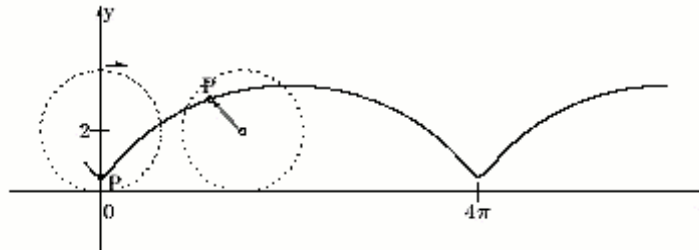
a) ak b leží na kružnici, čiže $b = (0, 0)$ dostávame klasickú cykloidu

$$C(t) = \begin{pmatrix} r(r - \sin t) \\ r(1 - \cos t) \end{pmatrix}$$



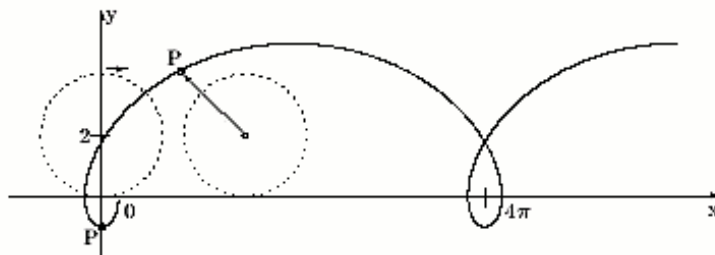
Obr. 2.8 Cykloida [12]

b) ak b leží v kruhu, ktorého hranica je daná kružnicou tak krivku nazývame tzv. *skrátenu* cykloidu



Obr. 2.9 Skrátenu cykloida [12]

c) ak b leží mimo kruhu, ktorého hranica je daná kružnicou tak krivku nazývame tzv. *predĺženú* cykloidu



Obr. 2.10 Predĺžená cykloida [12]

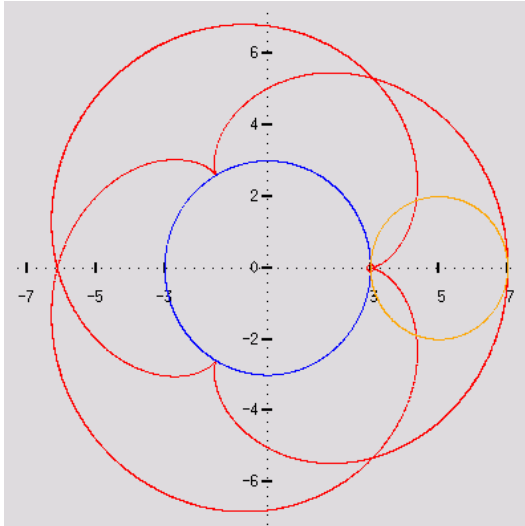
2. Trochoidy: Kotúľanie kružnice po kružnici

a) **Epitrochoidy** – kotúľanie zvonka

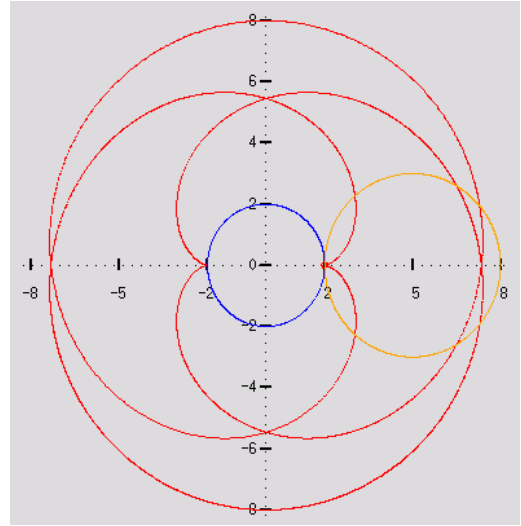
Rovnica epitrochoidy podľa (2.8) je

$$C(t) = \begin{pmatrix} (b_x - R - r)\cos(t + rt/R) + (R + r)\cos(rt/R) - b_y \sin(t + rt/R) \\ (b_x - R - r)\sin(t + rt/R) + (R + r)\sin(rt/R) - b_y \cos(t + rt/R) \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

kde r je polomer kotúľanej kružnice a R je polomer fixovanej kružnice, a $t \in \langle 0, 2\pi R/r \rangle$.



Obr. 2.11 Kotúľanie zvonka, kde polomer fixovanej kružnice $r = 3$, polomer kotúľanej kružnice $R = 2$ a kotúľaný bod $b = (r, 0)$ [12]



Obr. 2.12 Kotúľanie zvonka, kde polomer fixovanej kružnice $r = 2$, polomer kotúľanej kružnice $R = 2$, kotúľaný bod $b = (r, 0)$ [12]

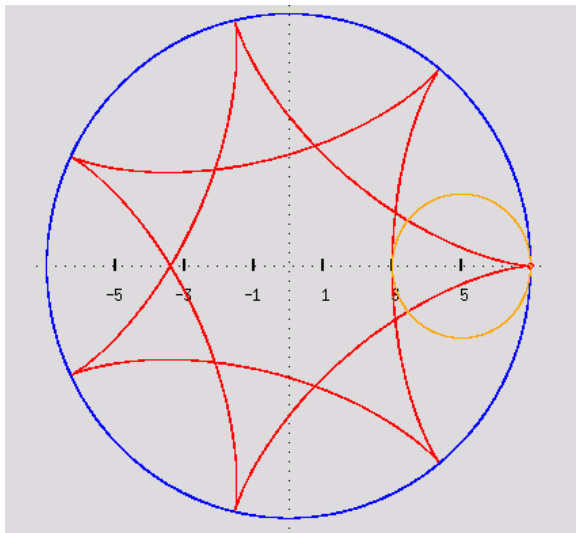
Ak $r = R$ a za b zoberieme bod $(r, 0)$ vidíme, že dostaneme rovnaký výsledok ako v príklade 2.14.

b) Hypotrochoidy – kotúľanie zvnútra

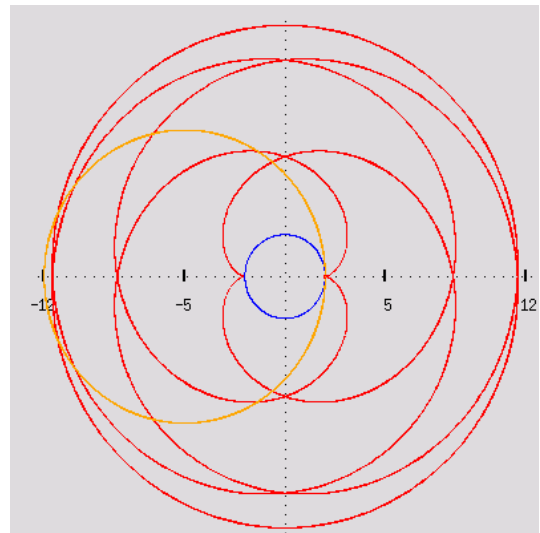
Rovnica hypotrochoidy podľa (2.8) je

$$C(t) = \begin{pmatrix} (b_x - R + r) \cos(rt/R - t) + (R - r) \cos(rt/R) - b_y \sin(rt/R - t) \\ (b_x - R + r) \sin(rt/R - t) + (R - r) \sin(rt/R) - b_y \cos(rt/R - t) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

kde r je polomer kotúľanej kružnice a R je polomer fixovanej kružnice, a $t \in \langle 0, 2\pi R / r \rangle$.



Obr. 2.13 Kotúľanie zvnútra, kde polomer fixovanej kružnice $r = 7$, polomer kotúľanej kružnice $R = 2$ a kotúľaný bod $b = (r, 0)$ [12]



Obr. 2.14 Kotúľanie zvnútra, kde polomer fixovanej kružnice $r = 2$, polomer kotúľanej kružnice $R = 7$ a kotúľaný bod $b = (r, 0)$ [12]

Ak $r = R/4$ a za b zoberieme bod $(r, 0)$ vidíme, že dostaneme rovnaký výsledok ako v príklade 2.15.

Súvis rúliet s jednoparametrickým systémom zhodností v rovine je ukázaný v [6]. Podrobnejšie rozobrané jednotlivé prípady môžeme nájsť v [4] a [7] pre komplexnú rovinu a v [6] pre euklidovskú rovinu.

3 Kotúľanie kriviek v priestore

Kotúľanie kriviek v priestore má podobné vlastnosti ako kotúľanie v rovine. Vyjadríme si pohyb v priestore a zadefinujeme podmienky, ktoré musia dve krivky spĺňať pre kotúľanie v priestore.

3.1 Pohyb

V kapitole 2.1 sme si ukázali ako zadefinovať pohyb v ľubovoľnom n -rozmer-
nom euklidovskom priestore. Teraz uvedieme jeho konkrétnu podobu pre $n = 3$.

Rovnice pohybu majú v priestore maticový tvar

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{X} + \mathbf{F}_0(t), \quad (3.1)$$

kde

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{F}_0(t) = \begin{pmatrix} a_{0x}(t) \\ a_{0y}(t) \\ a_{0z}(t) \end{pmatrix}.$$

Navyše matica $\mathbf{F}(t)$ je ortogonálna.

V rozšírených karteziánskych súradniciach má pohyb v E^3 tvar

$$\dot{\mathbf{X}}' = \mathbf{F}' \cdot \mathbf{X}' \quad (3.2)$$

po rozpísaní

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) & a_{0x}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) & a_{0y}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) & a_{0z}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.2 Vznik kriviek kotúľaním v priestore

Opäť pracujeme s dvomi krivkami zadanými parametricky $P_1(t) = (P_{1x}(t), P_{1y}(t), P_{1z}(t))$, $P_2(t) = (P_{2x}(t), P_{2y}(t), P_{2z}(t))$, $t \in I$ a obmedzíme sa na kotúľanie bez preklzovania a krivky bez inflexných bodov. Vektory zodpovedajúcich Frenetových repérov označíme $\mathbf{t}_1(t)$, $\mathbf{n}_1(t)$, $\mathbf{b}_1(t)$ pre krivku $P_1(t)$ a $\mathbf{t}_2(t)$, $\mathbf{n}_2(t)$, $\mathbf{b}_2(t)$ pre krivku $P_2(t)$. Pod zosúladenými parametrizáciami kriviek $P_1(t)$, $P_2(t)$, $t \in I$ budeme rozumieť zosúla-
denosť v zmysle definície 2.2.

Definícia 3.1: $P_1(t), P_2(t), t \in I$ sú parametrizácie dvoch kriviek v priestore. Kotúľanie krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$ je taký pohyb $\Phi: E^3 \times I \rightarrow E^3$, že pre všetky $t \in I$ platí

- (i) $\Phi_t(P_2(t)) = P_1(t)$
- (ii) $\Phi_t(P_2'(t)) = P_1'(t)$
- (iii) v každom momente $t_0 \in I$ majú krivky $\Phi_{t_0}(P_2(t))$ a $P_1(t)$ v spoločnom bode $\Phi_{t_0}(P_2(t_0)) = P_1(t_0)$ spoločnú oskulačnú rovinu.

Veta 3.2: (Vlastnosti kotúľania v priestore) Nech Φ je kotúľanie krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$ v priestore. Potom platí

1. $P_1(t), P_2(t), t \in I$ sú zosúladené parametrizácie.
2. $\Phi_t(\mathbf{t}_2(t)) = \mathbf{t}_1(t)$ pre všetky $t \in I$
3. $\Phi_t(\mathbf{b}_2(t)) = \mathbf{b}_1(t)$ pre všetky $t \in I$ alebo $\Phi_t(\mathbf{b}_2(t)) = -\mathbf{b}_1(t)$ pre všetky $t \in I$
4. $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = \mathbf{n}_1(t)$ pre všetky $t \in I$ alebo $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = -\mathbf{n}_1(t)$ pre všetky $t \in I$

Dôkaz: Tvrdenia 1 a 2 sa dokážu analogicky ako pre rovinný prípad.

3. Vektor binormály je kolmý na oskulačnú rovinu a jednotkový. Zobrazenie Φ_t je zhodnosť. Podľa vlastnosti (iii) z definície 3.1 a dôsledku vety 1.15 zobrazenie Φ_t zachováva kolmosť, preto pre všetky $t \in I$ platí $\Phi_t(\mathbf{b}_2(t)) = \mathbf{b}_1(t)$ alebo $\Phi_t(\mathbf{b}_2(t)) = -\mathbf{b}_1(t)$. Uvažujme opäť nad funkciou $f(t) = \Phi_t(\mathbf{b}_2(t)) \cdot \mathbf{b}_1(t)$. Vektory $\Phi_t(\mathbf{b}_2(t))$ a $\mathbf{b}_1(t)$ sú jednotkové, totožné alebo navzájom opačné, preto funkcia $f(t) = 1$ alebo $f(t) = -1$. Z vlastností skalárneho súčinu (spojitosť, lineárnosť) vyplýva, že pre všetky $t \in I$ nastane buď situácia $f(t) = 1$ alebo pre všetky $t \in I$ nastane situácia $f(t) = -1$.

Tvrdenie 4 vyplýva z tvrdenia 3 a (1.4)

Dôsledok: Pri kotúľaní krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$ majú krivky $\Phi_t(P_2(t))$ a $P_1(t)$ spoločnú nielen oskulačnú, ale aj normálovú a rektifikačnú rovinu.

Podobne ako v rovine môžeme definovať dva typy kotúľania.

Definícia 3.3: Ak sa krivka $P_2(t)$ kotúľá po krivke $P_1(t)$ tak, že pre všetky $t_0 \in I$ ležia obe krivky $P_1(t)$ a $\Phi_{t_0}(P_2(t))$ lokálne v jednom polpriestore vzhľadom na spoločnú rektifikačnú rovinu v bode $\Phi_{t_0}(P_2(t_0)) = P_1(t_0)$, hovoríme o kotúľaní *zvnútra*. Ak ležia krivky $P_1(t)$ a $\Phi_{t_0}(P_2(t))$ lokálne v opačných polpriestoroch, hovoríme o kotúľaní *zvonka*.

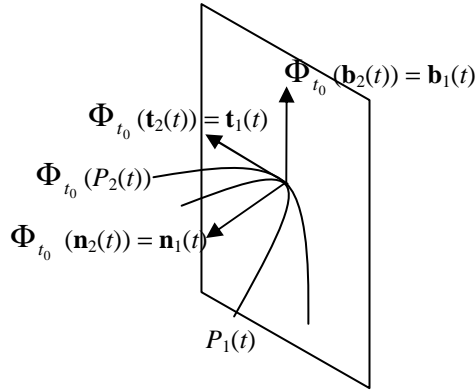
Rovnako ako aj v rovine máme alternatívne vyjadrenie kotúľania zvnútra resp. zvonka.

Veta 3.4: Nech Φ je kotúľanie krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$. Potom Φ je kotúľanie zvnútra práve vtedy, keď $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = \mathbf{n}_1(t)$ pre všetky $t \in I$ a kotúľanie zvonka práve vtedy, keď $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = -\mathbf{n}_1(t)$ pre všetky $t \in I$.

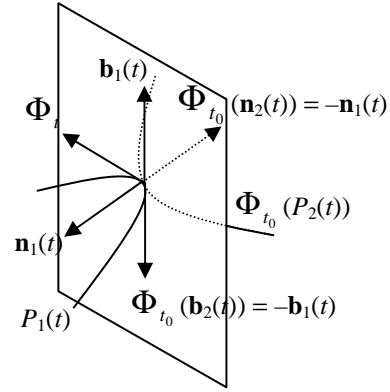
Dôkaz: „ \Leftarrow “ Podľa (1.4) leží vektor hlavnej normály buď v jednom alebo druhom polpriestore vzhľadom na rektifikačnú rovinu. Nech $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = \mathbf{n}_1(t)$, potom zhodnosť Φ_t zobrazí vektor $\mathbf{n}_2(t)$ do rovnakého polpriestoru vzhľadom na spoločnú rektifikačnú rovinu, v ktorej leží $\mathbf{n}_1(t)$. V opačnom prípade zhodnosť Φ_t zobrazí vektor $\mathbf{n}_2(t)$ do opačného polpriestoru. Keďže podľa vety 1.9 v blízkosti neinflexného bodu leží priestorová krivka v polpriestore určenej rektifikačnou rovinou a vektorom hlavnej normály, tak veta 2.10 spĺňa podmienku definície 2.9 pre kotúľanie zvnútra resp. zvonka.

Naopak „ \Rightarrow “ Ak hovoríme o kotúľaní zvnútra, tak krivky $P_1(t)$ a $\Phi_t(P_2(t))$ ležia v lokálne jednom polpriestore. Opäť podľa (1.4) a vety 1.9 platí potom, že $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = \mathbf{n}_1(t)$. Pre kotúľanie zvonka podľa tej istej vety platí $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = -\mathbf{n}_1(t)$.

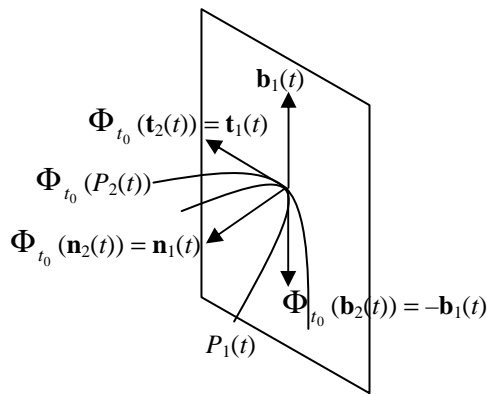
Oproti rovine musíme ešte pouvažovať nad vektormi $\mathbf{b}_1(t)$, $\Phi_t(\mathbf{b}_2(t))$. Oba ležia v rovnakej rektifikačnej rovine prislúchajúcej bodu $\Phi_t(P_2(t)) = P_1(t)$ v momente $t \in I$. Veta 3.4 hovorí o rozložení krivky vzhľadom na rektifikačnú rovinu, ale nehovorí nič o vektoroch $\mathbf{b}_1(t)$, $\Phi_t(\mathbf{b}_2(t))$. Uvažujme nad kotúľaním zvnútra. Majme krivky $P_1(t)$, $P_2(t)$, $t \in I$ potom pre vektory $\mathbf{b}_1(t)$ a $-\mathbf{b}_1(t)$ platí, že oba ležia v tej istej rektifikačnej rovine. Preto pre zobrazenie Φ_t platí, že zobrazí vektor $\Phi_t(\mathbf{b}_2(t)) = \mathbf{b}_1(t)$ alebo $\Phi_t(\mathbf{b}_2(t)) = -\mathbf{b}_1(t)$ pre všetky $t \in I$ pre kotúľanie zvnútra. To isté platí aj pre kotúľanie zvonka $\Phi_t(\mathbf{b}_2(t)) = -\mathbf{b}_1(t)$ alebo $\Phi_t(\mathbf{b}_2(t)) = \mathbf{b}_1(t)$ pre všetky $t \in I$. Teda v priestore máme dva typy kotúľania zvnútra resp. zvonka. Prvý typ kotúľania zvnútra je keď vektor $\Phi_t(\mathbf{b}_2(t)) = \mathbf{b}_1(t)$ a druhý typ keď vektor $\Phi_t(\mathbf{b}_2(t)) = -\mathbf{b}_1(t)$. Rovnako aj pre kotúľanie zvonka.



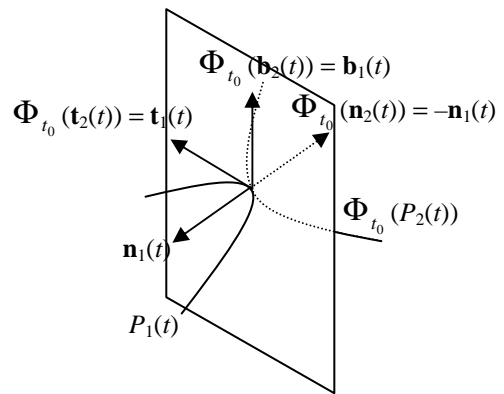
Obr. 3.1a Kotúľanie zvnútra



Obr. 3.2a Kotúľanie zvonka



Obr. 3.1b Kotúľanie zvnútra



Obr. 3.2b Kotúľanie zvonka

Majme dve krivky $P_1(t)$, $P_2(t)$, ktoré chceme kotúľať, a pohyb Φ_t , $t \in I$ podľa definície 2.1 pre $n = 3$.

Veta 3.5: Nech parametrizácie kriviek $P_1(t)$, $P_2(t)$, $t \in I$ sú zosúladené a pre zobrazenie Φ platí

1. $\Phi_t(P_2(t)) = P_1(t)$ pre všetky $t \in I$
2. $\Phi_t(\mathbf{t}_2(t)) = \mathbf{t}_1(t)$ pre všetky $t \in I$
3. $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = \mathbf{n}_1(t)$ pre všetky $t \in I$ alebo $\Phi_t(\mathbf{n}_2(t)) = -\mathbf{n}_1(t)$ pre všetky $t \in I$

Potom Φ je kotúľanie krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$.

Dôkaz: Podmienka 1 a 2 sa dokážu analogicky ako v rovinnom prípade. Bod $\Phi_t(P_2(t)) = P_1(t)$ a vektory $\mathbf{t}_1(t)$, $\mathbf{n}_1(t)$ v tomto bode tvoria oskulačnú rovinu, preto podmienka 3 je ekvivalentná podmienke (iii) z definície 3.1.

Pre väčšiu prehľadnosť, v nasledujúcej časti textu, budeme písať namiesto $P_1(t) = (P_{1x}(t), P_{1y}(t), P_{1z}(t))$ skrátene iba $P_1(t) = (P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$, rovnako aj pre vektory $\mathbf{t}_1(t) = (t_{1x}, t_{1y}, t_{1z})$, $\mathbf{n}_1(t) = (n_{1x}, n_{1y}, n_{1z})$ a $\mathbf{b}_1(t) = (b_{1x}, b_{1y}, b_{1z})$. Analogicky aj pre $P_2(t)$, $\mathbf{t}_2(t)$, $\mathbf{n}_2(t)$, $\mathbf{b}_2(t)$.

Kotúľanie krivky budujeme opäť pomocou jednoparametrického systému zhodností. Pracujeme v rozšírenej karteziánskej sústave súradníc. Chceme, aby pri kotúľaní dvoch kriviek pre bod, v ktorom sa dotýkajú, platili v každom momente $t \in I$ rovnosti

$$\mathbf{F}_1^{\sim}(\mathbf{t}_1(t), \mathbf{n}_1(t), \mathbf{b}_1(t), P_1(t)) = \mathbf{F}_2^{\sim}(\mathbf{t}_2(t), \mathbf{n}_2(t), \mathbf{b}_2(t), P_2(t))$$

$\mathbf{F}_1^{\sim}(\mathbf{t}_1(t), \mathbf{n}_1(t), \mathbf{b}_1(t), P_1(t)) = \mathbf{F}_2^{\sim}(\mathbf{t}_2(t), \mathbf{n}_2(t), -\mathbf{b}_2(t), P_2(t))$ tak ide o kotúľanie zvnútra resp.

$$\mathbf{F}_1^{\sim}(\mathbf{t}_1(t), \mathbf{n}_1(t), \mathbf{b}_1(t), P_1(t)) = \mathbf{F}_2^{\sim}(\mathbf{t}_2(t), -\mathbf{n}_2(t), -\mathbf{b}_2(t), P_2(t))$$

$$\mathbf{F}_1^{\sim}(\mathbf{t}_1(t), \mathbf{n}_1(t), \mathbf{b}_1(t), P_1(t)) = \mathbf{F}_2^{\sim}(\mathbf{t}_2(t), -\mathbf{n}_2(t), \mathbf{b}_2(t), P_2(t)) \text{ tak ide o kotúľanie zvonka.}$$

Použijeme zjednodušené označenie pre matice $\mathbf{F}_1^{\sim}(t) = \mathbf{F}_1^{\sim}(\mathbf{t}_1(t), \mathbf{n}_1(t), \mathbf{b}_1(t), P_1(t))$,

$$\mathbf{F}_{2_a}^{\sim}(t) = \mathbf{F}_2^{\sim}(\mathbf{t}_2(t), \mathbf{n}_2(t), \mathbf{b}_2(t), P_2(t)) \text{ resp. } \mathbf{F}_{2_b}^{\sim}(t) = \mathbf{F}_2^{\sim}(\mathbf{t}_2(t), \mathbf{n}_2(t), -\mathbf{b}_2(t), P_2(t))$$

a pre kotúľanie zvonka

$$\mathbf{F}_{2_a}^{\sim}(t) = \mathbf{F}_2^{\sim}(\mathbf{t}_2(t), -\mathbf{n}_2(t), \mathbf{b}_2(t), P_2(t)) \text{ resp. } \mathbf{F}_{2_b}^{\sim}(t) = \mathbf{F}_2^{\sim}(\mathbf{t}_2(t), -\mathbf{n}_2(t), -\mathbf{b}_2(t), P_2(t)).$$

Matica $\mathbf{F}_1^{\sim}(\mathbf{t}_1(t), \mathbf{n}_1(t), \mathbf{b}_1(t), P_1(t))$ má tvar

$$\mathbf{F}_1^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} t_{1x} & n_{1x} & b_{1x} & P_{1x} \\ t_{1y} & n_{1y} & b_{1y} & P_{1y} \\ t_{1z} & n_{1z} & b_{1z} & P_{1z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d'alej matice $\mathbf{F}_{2_a}^{\sim}(t)$, $\mathbf{F}_{2_b}^{\sim}(t)$, $\mathbf{F}_{2_a}^{\sim}(t)$, $\mathbf{F}_{2_b}^{\sim}(t)$

$$\mathbf{F}_{2_a}^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} t_{2x} & n_{2x} & b_{2x} & P_{2x} \\ t_{2y} & n_{2y} & b_{2y} & P_{2y} \\ t_{2z} & n_{2z} & b_{2z} & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_{2_a}^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} t_{2x} & n_{2x} & -b_{2x} & P_{2x} \\ t_{2y} & n_{2y} & -b_{2y} & P_{2y} \\ t_{2z} & n_{2z} & -b_{2z} & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{2_a}^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} t_{2x} & -n_{2x} & b_{2x} & P_{2x} \\ t_{2y} & -n_{2y} & b_{2y} & P_{2y} \\ t_{2z} & -n_{2z} & b_{2z} & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_{2_b}^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} t_{2x} & -n_{2x} & -b_{2x} & P_{2x} \\ t_{2y} & -n_{2y} & -b_{2y} & P_{2y} \\ t_{2z} & -n_{2z} & -b_{2z} & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maticovú reprezentáciu $\mathbf{M}^{\sim}(t)$ zhodnosti Φ_t , ktorá vyjadruje kotúľania krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$ zvnútra resp. zvonka hľadáme nasledovne

$$\mathbf{M}_{a^+}^{\sim}(t) \cdot \mathbf{F}_{2_a}^{\sim}(t) = \mathbf{F}_1^{\sim}(t) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{M}_{a^+}^{\sim}(t) = \mathbf{F}_1^{\sim}(t) \cdot \mathbf{F}_{2_a}^{\sim}(t)^{-1} \quad (3.4)$$

Analogicky aj pre ostatné prípady $\mathbf{F}_{2_b}^{\sim}(t)$, $\mathbf{F}_{2_a}^{\sim}(t)$, $\mathbf{F}_{2_b}^{\sim}(t)$. Potrebujeme ešte nájsť ich inverzné matice. Tie nájdeme pomocou determinantov

$$\det \mathbf{F}_{2_a}^{\sim}(t) = \begin{vmatrix} t_{2x} & n_{2x} & b_{2x} & P_{2x} \\ t_{2y} & n_{2y} & b_{2y} & P_{2y} \\ t_{2z} & n_{2z} & b_{2z} & P_{2z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= t_{2x}n_{2y}b_{2z} + t_{2z}n_{2x}b_{2y} + t_{2y}n_{2z}b_{2x} - t_{2z}n_{2y}b_{2x} - t_{2x}n_{2z}b_{2y} - t_{2y}n_{2x}b_{2z}$$

$$\det \mathbf{F}_{2_b}^{\sim}(t) = -t_{2x}n_{2y}b_{2z} - t_{2z}n_{2x}b_{2y} - t_{2y}n_{2z}b_{2x} + t_{2z}n_{2y}b_{2x} + t_{2x}n_{2z}b_{2y} + t_{2y}n_{2x}b_{2z}$$

$$\det \mathbf{F}_{2_a}^{\sim}(t) = -t_{2x}n_{2y}b_{2z} - t_{2z}n_{2x}b_{2y} - t_{2y}n_{2z}b_{2x} + t_{2z}n_{2y}b_{2x} + t_{2x}n_{2z}b_{2y} + t_{2y}n_{2x}b_{2z}$$

$$\det \mathbf{F}_{2_b}^{\sim}(t) = -t_{2x}n_{2y}b_{2z} + t_{2z}n_{2x}b_{2y} + t_{2y}n_{2z}b_{2x} - t_{2z}n_{2y}b_{2x} - t_{2x}n_{2z}b_{2y} - t_{2y}n_{2x}b_{2z}.$$

Označíme si $\det \mathbf{F}_{2_a}^{\sim}(t) = D_a^+$, $\det \mathbf{F}_{2_b}^{\sim}(t) = D_b^+$, $\det \mathbf{F}_{2_a}^{\sim}(t) = D_a^-$, $\det \mathbf{F}_{2_b}^{\sim}(t) = D_b^-$ potom

$$\mathbf{F}_{2_a}^{\sim}(t)^{-1} = \frac{1}{D_a^+} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{3 \times 3} & \mathbf{F}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0} & f_{44} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{F}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} n_{2y}b_{2z} - b_{2y}n_{2z} & -n_{2x}b_{2z} + n_{2z}b_{2x} & n_{2x}b_{2y} - n_{2y}b_{2x} \\ -t_{2y}b_{2z} + t_{2z}b_{2y} & t_{2x}b_{2z} - t_{2z}b_{2x} & -t_{2x}b_{2y} + t_{2y}b_{2x} \\ t_{2y}n_{2z} - n_{2y}t_{2z} & -t_{2x}n_{2z} + n_{2x}t_{2z} & t_{2x}n_{2y} - n_{2x}t_{2y} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} -n_{2x}b_{2y}P_{2z} - b_{2x}P_{2y}n_{2z} - P_{2x}n_{2y}b_{2z} + n_{2z}b_{2y}P_{2x} + b_{2z}P_{2y}n_{2x} + P_{2z}n_{2y}b_{2x} \\ t_{2x}b_{2y}P_{2z} + b_{2x}P_{2y}t_{2z} + P_{2x}t_{2y}b_{2z} - t_{2z}b_{2y}P_{2x} - b_{2z}P_{2y}t_{2x} - P_{2z}t_{2y}b_{2x} \\ -t_{2x}n_{2y}P_{2z} - n_{2x}P_{2y}t_{2z} - P_{2x}t_{2y}n_{2z} + t_{2z}n_{2y}P_{2x} + n_{2z}P_{2y}t_{2x} + P_{2z}t_{2y}n_{2x} \end{pmatrix},$$

$$f_{44} = t_{2x}n_{2y}b_{2z} + t_{2z}n_{2x}b_{2y} + t_{2y}n_{2z}b_{2x} - t_{2z}n_{2y}b_{2x} - t_{2x}n_{2z}b_{2y} - t_{2y}n_{2x}b_{2z}.$$

a postupne v ďalších prípadoch

$$\mathbf{F}_{2_b}^{\sim}(t)^{-1} = \frac{1}{D_b^+} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{3 \times 3} & \mathbf{F}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0} & f_{44} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{F}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -n_{2y}b_{2z} + b_{2y}n_{2z} & n_{2x}b_{2z} - n_{2z}b_{2x} & -n_{2x}b_{2y} + n_{2y}b_{2x} \\ t_{2y}b_{2z} - t_{2z}b_{2y} & -t_{2x}b_{2z} + t_{2z}b_{2x} & t_{2x}b_{2y} - t_{2y}b_{2x} \\ t_{2y}n_{2z} - n_{2y}t_{2z} & -t_{2x}n_{2z} + n_{2x}t_{2z} & t_{2x}n_{2y} - n_{2x}t_{2y} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} n_{2x}b_{2y}P_{2z} + b_{2x}P_{2y}n_{2z} + P_{2x}n_{2y}b_{2z} - n_{2z}b_{2y}P_{2x} - b_{2z}P_{2y}n_{2x} - P_{2z}n_{2y}b_{2x} \\ -t_{2x}b_{2y}P_{2z} - b_{2x}P_{2y}t_{2z} - P_{2x}t_{2y}b_{2z} + t_{2z}b_{2y}P_{2x} + b_{2z}P_{2y}t_{2x} + P_{2z}t_{2y}b_{2x} \\ -t_{2x}n_{2y}P_{2z} - n_{2x}P_{2y}t_{2z} - P_{2x}t_{2y}n_{2z} + t_{2z}n_{2y}P_{2x} + n_{2z}P_{2y}t_{2x} + P_{2z}t_{2y}n_{2x} \end{pmatrix},$$

$$f_{44} = -t_{2x}n_{2y}b_{2z} - t_{2z}n_{2x}b_{2y} - t_{2y}n_{2z}b_{2x} + t_{2z}n_{2y}b_{2x} + t_{2x}n_{2z}b_{2y} + t_{2y}n_{2x}b_{2z}.$$

resp.

$$\mathbf{F}_{2_a^-}^{-1}(t) = \frac{1}{D_a^-} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{3 \times 3} & \mathbf{F}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0} & f_{44} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{F}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -n_{2_y}b_{2_z} + b_{2_y}n_{2_z} & n_{2_x}b_{2_z} - n_{2_z}b_{2_x} & -n_{2_x}b_{2_y} + n_{2_y}b_{2_x} \\ -t_{2_y}b_{2_z} + t_{2_z}b_{2_y} & t_{2_x}b_{2_z} - t_{2_z}b_{2_x} & -t_{2_x}b_{2_y} + t_{2_y}b_{2_x} \\ -t_{2_y}n_{2_z} + n_{2_y}t_{2_z} & t_{2_x}n_{2_z} - n_{2_x}t_{2_z} & -t_{2_x}n_{2_y} + n_{2_x}t_{2_y} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} n_{2_x}b_{2_y}P_{2_z} + b_{2_x}P_{2_y}n_{2_z} + P_{2_x}n_{2_y}b_{2_z} - n_{2_z}b_{2_y}P_{2_x} - b_{2_z}P_{2_y}n_{2_x} - P_{2_z}n_{2_y}b_{2_x} \\ t_{2_x}b_{2_y}P_{2_z} + b_{2_x}P_{2_y}t_{2_z} + P_{2_x}t_{2_y}b_{2_z} - t_{2_z}b_{2_y}P_{2_x} - b_{2_z}P_{2_y}t_{2_x} - P_{2_z}t_{2_y}b_{2_x} \\ t_{2_x}n_{2_y}P_{2_z} + n_{2_x}P_{2_y}t_{2_z} + P_{2_x}t_{2_y}n_{2_z} - t_{2_z}n_{2_y}P_{2_x} - n_{2_z}P_{2_y}t_{2_x} - P_{2_z}t_{2_y}n_{2_x} \end{pmatrix},$$

$$f_{44} = -t_{2_x}n_{2_y}b_{2_z} - t_{2_z}n_{2_x}b_{2_y} - t_{2_y}n_{2_z}b_{2_x} + t_{2_z}n_{2_y}b_{2_x} + t_{2_x}n_{2_z}b_{2_y} + t_{2_y}n_{2_x}b_{2_z}.$$

resp.

$$\mathbf{F}_{2_b^-}^{-1}(t) = \frac{1}{D_b^-} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{3 \times 3} & \mathbf{F}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0} & f_{44} \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{F}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} n_{2_y}b_{2_z} - b_{2_y}n_{2_z} & -n_{2_x}b_{2_z} + n_{2_z}b_{2_x} & n_{2_x}b_{2_y} - n_{2_y}b_{2_x} \\ t_{2_y}b_{2_z} - t_{2_z}b_{2_y} & -t_{2_x}b_{2_z} + t_{2_z}b_{2_x} & t_{2_x}b_{2_y} - t_{2_y}b_{2_x} \\ -t_{2_y}n_{2_z} + n_{2_y}t_{2_z} & t_{2_x}n_{2_z} - n_{2_x}t_{2_z} & -t_{2_x}n_{2_y} + n_{2_x}t_{2_y} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} -n_{2_x}b_{2_y}P_{2_z} - b_{2_x}P_{2_y}n_{2_z} - P_{2_x}n_{2_y}b_{2_z} + n_{2_z}b_{2_y}P_{2_x} + b_{2_z}P_{2_y}n_{2_x} + P_{2_z}n_{2_y}b_{2_x} \\ -t_{2_x}b_{2_y}P_{2_z} - b_{2_x}P_{2_y}t_{2_z} - P_{2_x}t_{2_y}b_{2_z} + t_{2_z}b_{2_y}P_{2_x} + b_{2_z}P_{2_y}t_{2_x} + P_{2_z}t_{2_y}b_{2_x} \\ t_{2_x}n_{2_y}P_{2_z} + n_{2_x}P_{2_y}t_{2_z} + P_{2_x}t_{2_y}n_{2_z} - t_{2_z}n_{2_y}P_{2_x} - n_{2_z}P_{2_y}t_{2_x} - P_{2_z}t_{2_y}n_{2_x} \end{pmatrix},$$

$$f_{44} = t_{2_x}n_{2_y}b_{2_z} + t_{2_z}n_{2_x}b_{2_y} + t_{2_y}n_{2_z}b_{2_x} - t_{2_z}n_{2_y}b_{2_x} - t_{2_x}n_{2_z}b_{2_y} - t_{2_y}n_{2_x}b_{2_z}.$$

Tvar matice $\mathbf{M}_{a^+}^{-1}(t)$, ktorá reprezentuje kotúľanie krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$ zvnútra

resp. zvonka je

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde pre $\mathbf{F}_{2_a^+}^{-1}(t)$ majú prvky matice tvar

$$m_{11} = (t_{1_x}n_{2_y}b_{2_z} - t_{1_x}n_{2_z}b_{2_y} - n_{1_x}t_{2_y}b_{2_z} + n_{1_x}t_{2_z}b_{2_y} + b_{1_x}t_{2_y}n_{2_z} - b_{1_x}t_{2_z}n_{2_y})/D_a^+$$

$$m_{21} = (t_{1_y}n_{2_y}b_{2_z} - t_{1_y}n_{2_z}b_{2_y} - n_{1_y}t_{2_y}b_{2_z} + n_{1_y}t_{2_z}b_{2_y} + b_{1_y}t_{2_y}n_{2_z} - b_{1_y}t_{2_z}n_{2_y})/D_a^+$$

$$m_{31} = (t_{1_z}n_{2_y}b_{2_z} - t_{1_z}n_{2_z}b_{2_y} - n_{1_z}t_{2_y}b_{2_z} + n_{1_z}t_{2_z}b_{2_y} + b_{1_z}t_{2_y}n_{2_z} - b_{1_z}t_{2_z}n_{2_y})/D_a^+$$

$$\begin{aligned}
 m_{12} &= (-t_{1x}n_{2x}b_{2z} + t_{1x}n_{2z}b_{2x} + n_{1x}t_{2x}b_{2z} - n_{1x}t_{2z}b_{2x} - b_{1x}t_{2x}n_{2z} + b_{1x}t_{2z}n_{2x})/D_a^+ \\
 m_{22} &= (-t_{1y}n_{2x}b_{2z} + t_{1y}n_{2z}b_{2x} + n_{1y}t_{2x}b_{2z} - n_{1y}t_{2z}b_{2x} - b_{1y}t_{2x}n_{2z} + b_{1y}t_{2z}n_{2x})/D_a^+ \\
 m_{32} &= (-t_{1z}n_{2x}b_{2z} + t_{1z}n_{2z}b_{2x} + n_{1z}t_{2x}b_{2z} - n_{1z}t_{2z}b_{2x} - b_{1z}t_{2x}n_{2z} + b_{1z}t_{2z}n_{2x})/D_a^+ \\
 m_{13} &= (t_{1x}n_{2x}b_{2y} - t_{1x}n_{2y}b_{2x} - n_{1x}t_{2x}b_{2y} + n_{1x}t_{2y}b_{2x} + b_{1x}t_{2x}n_{2y} - b_{1x}t_{2y}n_{2x})/D_a^+ \\
 m_{23} &= (t_{1y}n_{2x}b_{2y} - t_{1y}n_{2y}b_{2x} - n_{1y}t_{2x}b_{2y} + n_{1y}t_{2y}b_{2x} + b_{1y}t_{2x}n_{2y} - b_{1y}t_{2y}n_{2x})/D_a^+ \\
 m_{33} &= (t_{1z}n_{2x}b_{2y} - t_{1z}n_{2y}b_{2x} - n_{1z}t_{2x}b_{2y} + n_{1z}t_{2y}b_{2x} + b_{1z}t_{2x}n_{2y} - b_{1z}t_{2y}n_{2x})/D_a^+ \\
 m_{14} &= (-t_{1x}n_{2x}b_{2y}P_{2z} - t_{1x}b_{2x}P_{2y}n_{2z} - t_{1x}P_{2x}n_{2y}b_{2z} + t_{1x}n_{2z}b_{2y}P_{2x} + t_{1x}b_{2z}P_{2y}n_{2x} + \\
 &+ t_{1x}P_{2z}n_{2y}b_{2x} + n_{1x}t_{2x}b_{2y}P_{2z} + n_{1x}b_{2x}P_{2y}t_{2z} + n_{1x}P_{2x}t_{2y}b_{2z} - n_{1x}t_{2z}b_{2y}P_{2x} - n_{1x}b_{2z}P_{2y}t_{2x} - \\
 &- n_{1x}P_{2z}t_{2y}b_{2x} - b_{1x}t_{2x}n_{2y}P_{2z} - b_{1x}n_{2x}P_{2y}t_{2z} - b_{1x}P_{2x}t_{2y}n_{2z} + b_{1x}t_{2z}n_{2y}P_{2x} + b_{1x}n_{2z}P_{2y}t_{2x} + \\
 &+ b_{1x}P_{2z}t_{2y}n_{2x})/D_a^+ + P_{1x} \\
 m_{24} &= (-t_{1y}n_{2x}b_{2y}P_{2z} - t_{1y}b_{2x}P_{2y}n_{2z} - t_{1y}P_{2x}n_{2y}b_{2z} + t_{1y}n_{2z}b_{2y}P_{2x} + t_{1y}b_{2z}P_{2y}n_{2x} + \\
 &+ t_{1y}P_{2z}n_{2y}b_{2x} + n_{1y}t_{2x}b_{2y}P_{2z} + n_{1y}b_{2x}P_{2y}t_{2z} + n_{1y}P_{2x}t_{2y}b_{2z} - n_{1y}t_{2z}b_{2y}P_{2x} - n_{1y}b_{2z}P_{2y}t_{2x} - \\
 &- n_{1y}P_{2z}t_{2y}b_{2x} - b_{1y}t_{2x}n_{2y}P_{2z} - b_{1y}n_{2x}P_{2y}t_{2z} - b_{1y}P_{2x}t_{2y}n_{2z} + b_{1y}t_{2z}n_{2y}P_{2x} + b_{1y}n_{2z}P_{2y}t_{2x} + \\
 &+ b_{1y}P_{2z}t_{2y}n_{2x})/D_a^+ + P_{1y} \\
 m_{34} &= (-t_{1z}n_{2x}b_{2y}P_{2z} - t_{1z}b_{2x}P_{2y}n_{2z} - t_{1z}P_{2x}n_{2y}b_{2z} + t_{1z}n_{2z}b_{2y}P_{2x} + t_{1z}b_{2z}P_{2y}n_{2x} + \\
 &+ t_{1z}P_{2z}n_{2y}b_{2x} + n_{1z}t_{2x}b_{2y}P_{2z} + n_{1z}b_{2x}P_{2y}t_{2z} + n_{1z}P_{2x}t_{2y}b_{2z} - n_{1z}t_{2z}b_{2y}P_{2x} - n_{1z}b_{2z}P_{2y}t_{2x} - \\
 &- n_{1z}P_{2z}t_{2y}b_{2x} - b_{1z}t_{2x}n_{2y}P_{2z} - b_{1z}n_{2x}P_{2y}t_{2z} - b_{1z}P_{2x}t_{2y}n_{2z} + b_{1z}t_{2z}n_{2y}P_{2x} + b_{1z}n_{2z}P_{2y}t_{2x} + \\
 &+ b_{1z}P_{2z}t_{2y}n_{2x})/D_a^+ + P_{1z} \\
 m_{41} &= m_{42} = m_{43} = 0; \quad m_{44} = 1 .
 \end{aligned}$$

pre $\mathbf{F}_{2_b}^{\sim}(t)$ majú prvky matice $\mathbf{M}_{b^+}^{\sim}(t)$

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= (-t_{1x}n_{2y}b_{2z} + t_{1x}n_{2z}b_{2y} + n_{1x}t_{2y}b_{2z} - n_{1x}t_{2z}b_{2y} + b_{1x}t_{2y}n_{2z} - b_{1x}t_{2z}n_{2y})/D_b^+ \\
 m_{21} &= (-t_{1y}n_{2y}b_{2z} + t_{1y}n_{2z}b_{2y} + n_{1y}t_{2y}b_{2z} - n_{1y}t_{2z}b_{2y} + b_{1y}t_{2y}n_{2z} - b_{1y}t_{2z}n_{2y})/D_b^+ \\
 m_{31} &= (-t_{1z}n_{2y}b_{2z} + t_{1z}n_{2z}b_{2y} + n_{1z}t_{2y}b_{2z} - n_{1z}t_{2z}b_{2y} + b_{1z}t_{2y}n_{2z} - b_{1z}t_{2z}n_{2y})/D_b^+ \\
 m_{12} &= (t_{1x}n_{2x}b_{2z} - t_{1x}n_{2z}b_{2x} - n_{1x}t_{2x}b_{2z} + n_{1x}t_{2z}b_{2x} - b_{1x}t_{2x}n_{2z} + b_{1x}t_{2z}n_{2x})/D_b^+ \\
 m_{22} &= (t_{1y}n_{2x}b_{2z} - t_{1y}n_{2z}b_{2x} - n_{1y}t_{2x}b_{2z} + n_{1y}t_{2z}b_{2x} - b_{1y}t_{2x}n_{2z} + b_{1y}t_{2z}n_{2x})/D_b^+ \\
 m_{32} &= (t_{1z}n_{2x}b_{2z} - t_{1z}n_{2z}b_{2x} - n_{1z}t_{2x}b_{2z} + n_{1z}t_{2z}b_{2x} - b_{1z}t_{2x}n_{2z} + b_{1z}t_{2z}n_{2x})/D_b^+ \\
 m_{13} &= (-t_{1x}n_{2x}b_{2y} + t_{1x}n_{2y}b_{2x} + n_{1x}t_{2x}b_{2y} - n_{1x}t_{2y}b_{2x} + b_{1x}t_{2x}n_{2y} - b_{1x}t_{2y}n_{2x})/D_b^+ \\
 m_{23} &= (-t_{1y}n_{2x}b_{2y} + t_{1y}n_{2y}b_{2x} + n_{1y}t_{2x}b_{2y} - n_{1y}t_{2y}b_{2x} + b_{1y}t_{2x}n_{2y} - b_{1y}t_{2y}n_{2x})/D_b^+ \\
 m_{33} &= (-t_{1z}n_{2x}b_{2y} + t_{1z}n_{2y}b_{2x} + n_{1z}t_{2x}b_{2y} - n_{1z}t_{2y}b_{2x} + b_{1z}t_{2x}n_{2y} - b_{1z}t_{2y}n_{2x})/D_b^+ \\
 m_{14} &= (t_{1x}n_{2x}b_{2y}P_{2z} + t_{1x}b_{2x}P_{2y}n_{2z} + t_{1x}P_{2x}n_{2y}b_{2z} - t_{1x}n_{2z}b_{2y}P_{2x} - t_{1x}b_{2z}P_{2y}n_{2x} - \\
 &- t_{1x}P_{2z}n_{2y}b_{2x} - n_{1x}t_{2x}b_{2y}P_{2z} - n_{1x}b_{2x}P_{2y}t_{2z} - n_{1x}P_{2x}t_{2y}b_{2z} + n_{1x}t_{2z}b_{2y}P_{2x} + n_{1x}b_{2z}P_{2y}t_{2x} + \\
 &+ n_{1x}P_{2z}t_{2y}b_{2x} - b_{1x}t_{2x}n_{2y}P_{2z} - b_{1x}n_{2x}P_{2y}t_{2z} - b_{1x}P_{2x}t_{2y}n_{2z} + b_{1x}t_{2z}n_{2y}P_{2x} + b_{1x}n_{2z}P_{2y}t_{2x} + \\
 &+ b_{1x}P_{2z}t_{2y}n_{2x})/D_b^+ + P_{1x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{24} = & (t_{1y}n_{2x}b_{2y}P_{2z} + t_{1y}b_{2x}P_{2y}n_{2z} + t_{1y}P_{2x}n_{2y}b_{2z} - t_{1y}n_{2z}b_{2y}P_{2x} - t_{1y}b_{2z}P_{2y}n_{2x} - \\
 & - t_{1y}P_{2z}n_{2y}b_{2x} - n_{1y}t_{2x}b_{2y}P_{2z} - n_{1y}b_{2x}P_{2y}t_{2z} - n_{1y}P_{2x}t_{2y}b_{2z} + n_{1y}t_{2z}b_{2y}P_{2x} + n_{1y}b_{2z}P_{2y}t_{2x} + \\
 & + n_{1y}P_{2z}t_{2y}b_{2x} - b_{1y}t_{2x}n_{2y}P_{2z} - b_{1y}n_{2x}P_{2y}t_{2z} - b_{1y}P_{2x}t_{2y}n_{2z} + b_{1y}t_{2z}n_{2y}P_{2x} + b_{1y}n_{2z}P_{2y}t_{2x} + \\
 & + b_{1y}P_{2z}t_{2y}n_{2x})/D_b^+ + P_{1y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{34} = & (t_{1z}n_{2x}b_{2y}P_{2z} + t_{1z}b_{2x}P_{2y}n_{2z} + t_{1z}P_{2x}n_{2y}b_{2z} - t_{1z}n_{2z}b_{2y}P_{2x} - t_{1z}b_{2z}P_{2y}n_{2x} - \\
 & - t_{1z}P_{2z}n_{2y}b_{2x} - n_{1z}t_{2x}b_{2y}P_{2z} - n_{1z}b_{2x}P_{2y}t_{2z} - n_{1z}P_{2x}t_{2y}b_{2z} + n_{1z}t_{2z}b_{2y}P_{2x} + n_{1z}b_{2z}P_{2y}t_{2x} + \\
 & + n_{1z}P_{2z}t_{2y}b_{2x} - b_{1z}t_{2x}n_{2y}P_{2z} - b_{1z}n_{2x}P_{2y}t_{2z} - b_{1z}P_{2x}t_{2y}n_{2z} + b_{1z}t_{2z}n_{2y}P_{2x} + b_{1z}n_{2z}P_{2y}t_{2x} + \\
 & + b_{1z}P_{2z}t_{2y}n_{2x})/D_b^+ + P_{1z}
 \end{aligned}$$

$$m_{41} = m_{42} = m_{43} = 0; \quad m_{44} = 1 .$$

resp. $\mathbf{M}_a^-(t)$ pre kotúľanie zvonka najskôr pre $\mathbf{F}_{2a}^-(t)$

$$m_{11} = (- t_{1x}n_{2y}b_{2z} + t_{1x}n_{2z}b_{2y} - n_{1x}t_{2y}b_{2z} + n_{1x}t_{2z}b_{2y} - b_{1x}t_{2y}n_{2z} + b_{1x}t_{2z}n_{2y})/D_a^-$$

$$m_{21} = (- t_{1y}n_{2y}b_{2z} + t_{1y}n_{2z}b_{2y} - n_{1y}t_{2y}b_{2z} + n_{1y}t_{2z}b_{2y} - b_{1y}t_{2y}n_{2z} + b_{1y}t_{2z}n_{2y})/D_a^-$$

$$m_{31} = (- t_{1z}n_{2y}b_{2z} + t_{1z}n_{2z}b_{2y} - n_{1z}t_{2y}b_{2z} + n_{1z}t_{2z}b_{2y} - b_{1z}t_{2y}n_{2z} + b_{1z}t_{2z}n_{2y})/D_a^-$$

$$m_{12} = (t_{1x}n_{2x}b_{2z} - t_{1x}n_{2z}b_{2x} + n_{1x}t_{2x}b_{2z} - n_{1x}t_{2z}b_{2x} + b_{1x}t_{2x}n_{2z} - b_{1x}t_{2z}n_{2x})/D_a^-$$

$$m_{22} = (t_{1y}n_{2x}b_{2z} - t_{1y}n_{2z}b_{2x} + n_{1y}t_{2x}b_{2z} - n_{1y}t_{2z}b_{2x} + b_{1y}t_{2x}n_{2z} - b_{1y}t_{2z}n_{2x})/D_a^-$$

$$m_{32} = (t_{1z}n_{2x}b_{2z} - t_{1z}n_{2z}b_{2x} + n_{1z}t_{2x}b_{2z} - n_{1z}t_{2z}b_{2x} + b_{1z}t_{2x}n_{2z} - b_{1z}t_{2z}n_{2x})/D_a^-$$

$$m_{13} = (- t_{1x}n_{2x}b_{2y} + t_{1x}n_{2y}b_{2x} - n_{1x}t_{2x}b_{2y} + n_{1x}t_{2y}b_{2x} - b_{1x}t_{2x}n_{2y} + b_{1x}t_{2y}n_{2x})/D_a^-$$

$$m_{23} = (- t_{1y}n_{2x}b_{2y} + t_{1y}n_{2y}b_{2x} - n_{1y}t_{2x}b_{2y} + n_{1y}t_{2y}b_{2x} - b_{1y}t_{2x}n_{2y} + b_{1y}t_{2y}n_{2x})/D_a^-$$

$$m_{33} = (- t_{1z}n_{2x}b_{2y} + t_{1z}n_{2y}b_{2x} - n_{1z}t_{2x}b_{2y} + n_{1z}t_{2y}b_{2x} - b_{1z}t_{2x}n_{2y} + b_{1z}t_{2y}n_{2x})/D_a^-$$

$$\begin{aligned}
 m_{14} = & (t_{1x}n_{2x}b_{2y}P_{2z} + t_{1x}b_{2x}P_{2y}n_{2z} + t_{1x}P_{2x}n_{2y}b_{2z} - t_{1x}n_{2z}b_{2y}P_{2x} - t_{1x}b_{2z}P_{2y}n_{2x} - \\
 & - t_{1x}P_{2z}n_{2y}b_{2x} + n_{1x}t_{2x}b_{2y}P_{2z} + n_{1x}b_{2x}P_{2y}t_{2z} + n_{1x}P_{2x}t_{2y}b_{2z} - n_{1x}t_{2z}b_{2y}P_{2x} - n_{1x}b_{2z}P_{2y}t_{2x} - \\
 & - n_{1x}P_{2z}t_{2y}b_{2x} + b_{1x}t_{2x}n_{2y}P_{2z} + b_{1x}n_{2x}P_{2y}t_{2z} + b_{1x}P_{2x}t_{2y}n_{2z} - b_{1x}t_{2z}n_{2y}P_{2x} - b_{1x}n_{2z}P_{2y}t_{2x} - \\
 & - b_{1x}P_{2z}t_{2y}n_{2x})/D_a^- + P_{1x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{24} = & (t_{1y}n_{2x}b_{2y}P_{2z} + t_{1y}b_{2x}P_{2y}n_{2z} + t_{1y}P_{2x}n_{2y}b_{2z} - t_{1y}n_{2z}b_{2y}P_{2x} - t_{1y}b_{2z}P_{2y}n_{2x} - \\
 & t_{1y}P_{2z}n_{2y}b_{2x} + n_{1y}t_{2x}b_{2y}P_{2z} + n_{1y}b_{2x}P_{2y}t_{2z} + n_{1y}P_{2x}t_{2y}b_{2z} - n_{1y}t_{2z}b_{2y}P_{2x} - n_{1y}b_{2z}P_{2y}t_{2x} - \\
 & - n_{1y}P_{2z}t_{2y}b_{2x} + b_{1y}t_{2x}n_{2y}P_{2z} + b_{1y}n_{2x}P_{2y}t_{2z} + b_{1y}P_{2x}t_{2y}n_{2z} - b_{1y}t_{2z}n_{2y}P_{2x} - b_{1y}n_{2z}P_{2y}t_{2x} - \\
 & - b_{1y}P_{2z}t_{2y}n_{2x})/D_a^- + P_{1y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_{34} = & (t_{1z}n_{2x}b_{2y}P_{2z} + t_{1z}b_{2x}P_{2y}n_{2z} + t_{1z}P_{2x}n_{2y}b_{2z} - t_{1z}n_{2z}b_{2y}P_{2x} - t_{1z}b_{2z}P_{2y}n_{2x} - \\
 & - t_{1z}P_{2z}n_{2y}b_{2x} + n_{1z}t_{2x}b_{2y}P_{2z} + n_{1z}b_{2x}P_{2y}t_{2z} + n_{1z}P_{2x}t_{2y}b_{2z} - n_{1z}t_{2z}b_{2y}P_{2x} - n_{1z}b_{2z}P_{2y}t_{2x} - \\
 & - n_{1z}P_{2z}t_{2y}b_{2x} + b_{1z}t_{2x}n_{2y}P_{2z} + b_{1z}n_{2x}P_{2y}t_{2z} + b_{1z}P_{2x}t_{2y}n_{2z} - b_{1z}t_{2z}n_{2y}P_{2x} - b_{1z}n_{2z}P_{2y}t_{2x} - \\
 & - b_{1z}P_{2z}t_{2y}n_{2x})/D_a^- + P_{1z}
 \end{aligned}$$

$$m_{41} = m_{42} = m_{43} = 0; \quad m_{44} = 1 .$$

a nakoniec $\mathbf{M}_{b^-}^{\sim}(t)$ pre $\mathbf{F}_{2_b^-}^{\sim}(t)$

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= (t_{1x}n_{2y}b_{2z} - t_{1x}n_{2z}b_{2y} + n_{1x}t_{2y}b_{2z} - n_{1x}t_{2z}b_{2y} - b_{1x}t_{2y}n_{2z} + b_{1x}t_{2z}n_{2y})/D_b^- \\
 m_{21} &= (t_{1y}n_{2y}b_{2z} - t_{1y}n_{2z}b_{2y} + n_{1y}t_{2y}b_{2z} - n_{1y}t_{2z}b_{2y} - b_{1y}t_{2y}n_{2z} + b_{1y}t_{2z}n_{2y})/D_b^- \\
 m_{31} &= (t_{1z}n_{2y}b_{2z} - t_{1z}n_{2z}b_{2y} + n_{1z}t_{2y}b_{2z} - n_{1z}t_{2z}b_{2y} - b_{1z}t_{2y}n_{2z} + b_{1z}t_{2z}n_{2y})/D_b^- \\
 m_{12} &= (-t_{1x}n_{2x}b_{2z} + t_{1x}n_{2z}b_{2x} - n_{1x}t_{2x}b_{2z} + n_{1x}t_{2z}b_{2x} + b_{1x}t_{2x}n_{2z} - b_{1x}t_{2z}n_{2x})/D_b^- \\
 m_{22} &= (-t_{1y}n_{2x}b_{2z} + t_{1y}n_{2z}b_{2x} - n_{1y}t_{2x}b_{2z} + n_{1y}t_{2z}b_{2x} + b_{1y}t_{2x}n_{2z} - b_{1y}t_{2z}n_{2x})/D_b^- \\
 m_{32} &= (-t_{1z}n_{2x}b_{2z} + t_{1z}n_{2z}b_{2x} - n_{1z}t_{2x}b_{2z} + n_{1z}t_{2z}b_{2x} + b_{1z}t_{2x}n_{2z} - b_{1z}t_{2z}n_{2x})/D_b^- \\
 m_{13} &= (t_{1x}n_{2x}b_{2y} - t_{1x}n_{2y}b_{2x} + n_{1x}t_{2x}b_{2y} - n_{1x}t_{2y}b_{2x} - b_{1x}t_{2x}n_{2y} + b_{1x}t_{2y}n_{2x})/D_b^- \\
 m_{23} &= (t_{1y}n_{2x}b_{2y} - t_{1y}n_{2y}b_{2x} + n_{1y}t_{2x}b_{2y} - n_{1y}t_{2y}b_{2x} - b_{1y}t_{2x}n_{2y} + b_{1y}t_{2y}n_{2x})/D_b^- \\
 m_{33} &= (t_{1z}n_{2x}b_{2y} - t_{1z}n_{2y}b_{2x} + n_{1z}t_{2x}b_{2y} - n_{1z}t_{2y}b_{2x} - b_{1z}t_{2x}n_{2y} + b_{1z}t_{2y}n_{2x})/D_b^- \\
 m_{14} &= (-t_{1x}n_{2x}b_{2y}P_{2z} - t_{1x}b_{2x}P_{2y}n_{2z} - t_{1x}P_{2x}n_{2y}b_{2z} + t_{1x}n_{2z}b_{2y}P_{2x} + t_{1x}b_{2z}P_{2y}n_{2x} + \\
 &+ t_{1x}P_{2z}n_{2y}b_{2x} - n_{1x}t_{2x}b_{2y}P_{2z} - n_{1x}b_{2x}P_{2y}t_{2z} - n_{1x}P_{2x}t_{2y}b_{2z} + n_{1x}t_{2z}b_{2y}P_{2x} + n_{1x}b_{2z}P_{2y}t_{2x} + \\
 &+ n_{1x}P_{2z}t_{2y}b_{2x} + b_{1x}t_{2x}n_{2y}P_{2z} + b_{1x}n_{2x}P_{2y}t_{2z} + b_{1x}P_{2x}t_{2y}n_{2z} - b_{1x}t_{2z}n_{2y}P_{2x} - b_{1x}n_{2z}P_{2y}t_{2x} - \\
 &- b_{1x}P_{2z}t_{2y}n_{2x})/D_b^- + P_{1x} \\
 m_{24} &= (-t_{1y}n_{2x}b_{2y}P_{2z} - t_{1y}b_{2x}P_{2y}n_{2z} - t_{1y}P_{2x}n_{2y}b_{2z} + t_{1y}n_{2z}b_{2y}P_{2x} + t_{1y}b_{2z}P_{2y}n_{2x} + \\
 &+ t_{1y}P_{2z}n_{2y}b_{2x} - n_{1y}t_{2x}b_{2y}P_{2z} - n_{1y}b_{2x}P_{2y}t_{2z} - n_{1y}P_{2x}t_{2y}b_{2z} + n_{1y}t_{2z}b_{2y}P_{2x} + n_{1y}b_{2z}P_{2y}t_{2x} + \\
 &+ n_{1y}P_{2z}t_{2y}b_{2x} + b_{1y}t_{2x}n_{2y}P_{2z} + b_{1y}n_{2x}P_{2y}t_{2z} + b_{1y}P_{2x}t_{2y}n_{2z} - b_{1y}t_{2z}n_{2y}P_{2x} - b_{1y}n_{2z}P_{2y}t_{2x} - \\
 &b_{1y}P_{2z}t_{2y}n_{2x})/D_b^- + P_{1y} \\
 m_{34} &= (-t_{1z}n_{2x}b_{2y}P_{2z} - t_{1z}b_{2x}P_{2y}n_{2z} - t_{1z}P_{2x}n_{2y}b_{2z} + t_{1z}n_{2z}b_{2y}P_{2x} + t_{1z}b_{2z}P_{2y}n_{2x} + \\
 &+ t_{1z}P_{2z}n_{2y}b_{2x} - n_{1z}t_{2x}b_{2y}P_{2z} - n_{1z}b_{2x}P_{2y}t_{2z} - n_{1z}P_{2x}t_{2y}b_{2z} + n_{1z}t_{2z}b_{2y}P_{2x} + n_{1z}b_{2z}P_{2y}t_{2x} + \\
 &+ n_{1z}P_{2z}t_{2y}b_{2x} + b_{1z}t_{2x}n_{2y}P_{2z} + b_{1z}n_{2x}P_{2y}t_{2z} + b_{1z}P_{2x}t_{2y}n_{2z} - b_{1z}t_{2z}n_{2y}P_{2x} - b_{1z}n_{2z}P_{2y}t_{2x} - \\
 &- b_{1z}P_{2z}t_{2y}n_{2x})/D_b^- + P_{1z} \\
 m_{41} &= m_{42} = m_{43} = 0; m_{44} = 1.
 \end{aligned}$$

Veta 3.6: Nech $P_1(t), P_2(t), t \in I$ sú zosúladené parametrizácie dvoch kriviek. Potom

$$\mathbf{M}_{a^+}^{\sim}(t) = \mathbf{F}_1^{\sim}(t) \cdot \mathbf{F}_{2_a^+}^{\sim}(t)^{-1} \text{ alebo } \mathbf{M}_{b^+}^{\sim}(t) = \mathbf{F}_1^{\sim}(t) \cdot \mathbf{F}_{2_b^+}^{\sim}(t)^{-1}$$

$$\text{resp. } \mathbf{M}_{a^-}^{\sim}(t) = \mathbf{F}_1^{\sim}(t) \cdot \mathbf{F}_{2_a^-}^{\sim}(t)^{-1} \text{ alebo } \mathbf{M}_{b^-}^{\sim}(t) = \mathbf{F}_1^{\sim}(t) \cdot \mathbf{F}_{2_b^-}^{\sim}(t)^{-1}$$

je maticová reprezentácia kotúľania krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$ zvnútra resp. zvonka.

Dôkaz: Matica $\mathbf{M}^{\sim}(t)$ reprezentuje zobrazenie Φ , ktoré spĺňa podmienky vety 3.5. Transformuje Frenetov repér krivky $P_2(t)$ v každom momente $t \in I$ do Frenetovho repéra krivky $P_1(t)$, a teda ide o kotúľanie krivky zvnútra. Analogicky aj pre kotúľanie zvonka.

V priestore máme štyri typy kotúľania: dva typy kotúľania zvnútra a dva typy kotúľania zvonka. Potom parametrické vyjadrenie krivky $P_3(t)$, ktorá vznikne pohybom

bodu $X \in E^3$ pri kotúľaní krivky $P_2(t)$ po krivke $P_1(t)$ zvnútra resp. zvonka, dostaneme ako

$$\mathbf{P}_{a^+}^{\sim}(t) = \mathbf{M}_{a^+}^{\sim}(t) \cdot \mathbf{X}^{\sim}, \quad (3.5a)$$

$$\mathbf{P}_{b^+}^{\sim}(t) = \mathbf{M}_{b^+}^{\sim}(t) \cdot \mathbf{X}^{\sim}, \quad (3.5b)$$

$$\mathbf{P}_{a^-}^{\sim}(t) = \mathbf{M}_{a^-}^{\sim}(t) \cdot \mathbf{X}^{\sim}, \quad (3.5c)$$

$$\mathbf{P}_{b^-}^{\sim}(t) = \mathbf{M}_{b^-}^{\sim}(t) \cdot \mathbf{X}^{\sim}, \quad (3.5d)$$

kde matica \mathbf{X}' reprezentuje body krivky vzniknutej pomocou kotúľania a matica \mathbf{X}^{\sim} obsahuje rozšírené súradnice kotúľaného bodu. Rovnako ako v rovine aj tu platí, že kotúľaný bod X je viazaný na kotúľanú krivku $P_2(t)$.

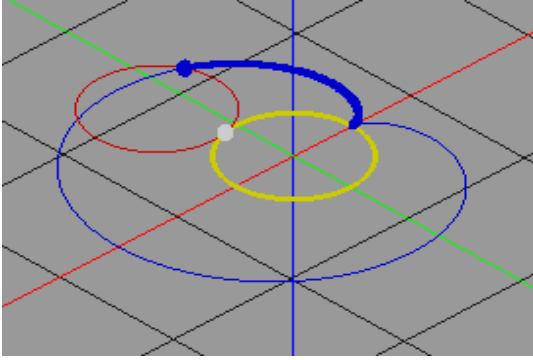
Pozrime sa ešte na súvis medzi kotúľaním v rovine a kotúľaním v priestore. Zoberme si v priestore dve krivky $P_1(t)$ a $P_2(t)$, ktoré ležia v jednej rovine. Označme si ju π . Rovina π je určená dvomi lineárne nezávislými vektormi a bodom, nech sú to vektory $\mathbf{t}_2(t)$, $\mathbf{n}_2(t)$ a bod $P_2(t)$. Majme pohyb Φ_t , $t \in I$ v zmysle definície 3.1, potom môžeme vysloviť nasledujúcu vetu.

Veta 3.7: Nech krivky $P_1(t)$ a $P_2(t)$, $t \in I$ majú zosúladené parametrizácie a ležia v rovine π . Potom platí

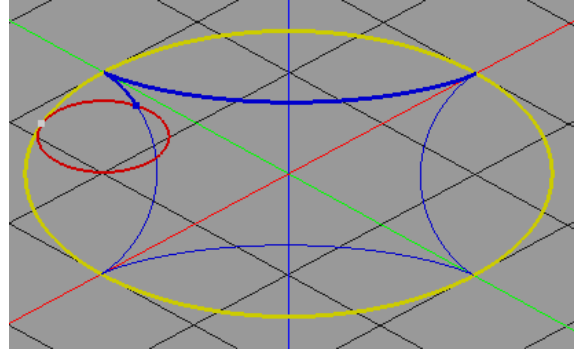
1. Každé zo štyroch kotúľaní $\Phi_t: E^3 \rightarrow E^3$, $t \in I$ zachováva rovinu π .
2. Ohraničenie kotúľania Φ_t , $t \in I$ na rovinu π je kotúľaním v rovine π .

Dôkaz:

1. To, že zhodnosť Φ_t zobrazuje rovinu π do seba v každom momente $t \in I$, vyplýva zo skutočnosti, že rovina π je určená vektormi $\mathbf{t}_2(t)$, $\mathbf{n}_2(t)$ a bodom $P_2(t)$, ale tiež vektormi $\mathbf{t}_1(t)$, $\mathbf{n}_1(t)$ a bodom $P_1(t)$. Zobrazenie Φ_t podľa vety 3.2 zobrazuje vektory $\mathbf{t}_2(t)$, $\mathbf{n}_2(t)$ do vektorov $\mathbf{t}_1(t)$, $\mathbf{n}_1(t)$ alebo $-\mathbf{n}_1(t)$ a bod $P_2(t)$ do bodu $P_1(t)$. Preto platí $\Phi_t(\pi) = \pi$.
2. Definícia 3.1 kotúľania v priestore spĺňa podmienky kotúľania v rovine podľa definície 2.7 vynechaním podmienky (iii).



Obr. 3.3 Krivka z príkladu 2.13 ako výsledok kotúľania v priestore



Obr. 3.4 Astroida ako výsledok kotúľania v priestore

Príklad 3.8: Zoberme si v priestore skrutkovicu a kotúľajme po nej kružnicu

$$P_1(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad \text{pre } t \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad a > 0, \quad b \neq 0$$

$$P_2(t) = \left(r \cos \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t \right), r \sin \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t \right), 0 \right) \quad \text{pre } t \in \langle 0, 2\pi \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} \rangle.$$

Vidíme, že podmienka zosúladených parametrizácií platí, teda $|P_1'(t)| = |P_2'(t)|$ pre všetky $t \in I$.

Vypočítame vektory $\mathbf{t}_1(t)$, $\mathbf{n}_1(t)$, $\mathbf{b}_1(t)$ a $\mathbf{t}_2(t)$, $\mathbf{n}_2(t)$, $\mathbf{b}_2(t)$

$$\mathbf{t}_1(t) = \left(\frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \quad \mathbf{t}_2(t) = \left(-\sin \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t \right), \cos \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t \right), 0 \right)$$

$$\mathbf{b}_1(t) = \left(\frac{b \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{-b \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \quad \mathbf{b}_2(t) = (0, 0, 1)$$

$$\mathbf{n}_1(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \quad \mathbf{n}_2(t) = \left(-\cos \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t \right), -\sin \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t \right), 0 \right).$$

Potom

$$\mathbf{F}_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}} & -\cos t & \frac{b \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}} & a \cos t \\ \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}} & -\sin t & \frac{-b \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}} & a \sin t \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & bt \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{2_a^+}^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right) & -\cos\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right) & 0 & r\cos\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right) & -\sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right) & 0 & r\sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{a^+}^{\sim}(t) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}$$

kde

$$m_{11} = \frac{a \sin t}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right) + \cos t \cos\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right)$$

$$m_{21} = \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(-\sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right)\right) + \sin t \cos\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right)$$

$$m_{31} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(-\sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right)\right)$$

$$m_{12} = \frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right) + \cos t \sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right)$$

$$m_{22} = \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right) + \sin t \sin\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right)$$

$$m_{32} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{r}t\right)$$

$$m_{13} = \frac{b \sin t}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad m_{23} = \frac{-b \cos t}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad m_{33} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$m_{14} = (a-r)\cos t \quad m_{24} = (a-r)\sin t \quad m_{34} = bt$$

$$m_{41} = m_{42} = m_{43} = 0; \quad m_{44} = 1.$$

Potom pre ľubovoľný bod $(x, y, z, 1)$

$$P_{3x} = \frac{a \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t\right) x + \cos t \cos\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t\right) x +$$

$$+ \frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t\right) y + \cos t \sin\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t\right) y +$$

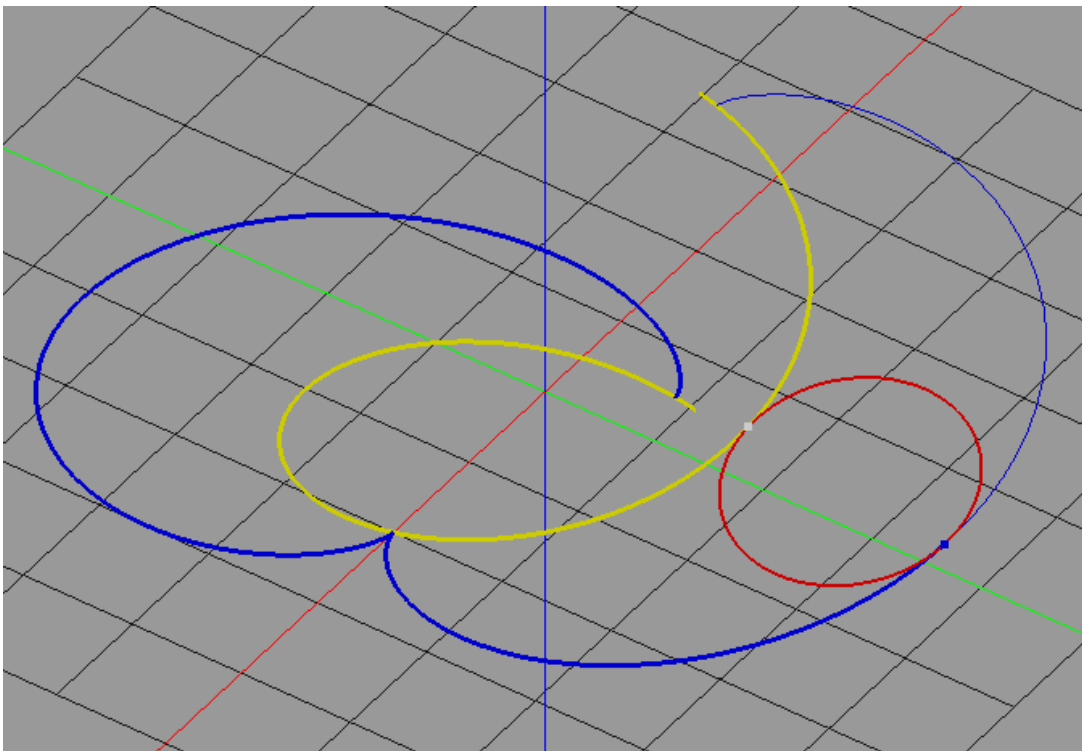
$$+ \frac{b \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}} z + (a - r) \cos t$$

$$P_{3y} = \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(-\sin\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t\right)\right) x + \sin t \cos\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t\right) x +$$

$$+ \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t\right) y + \sin t \sin\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t\right) y +$$

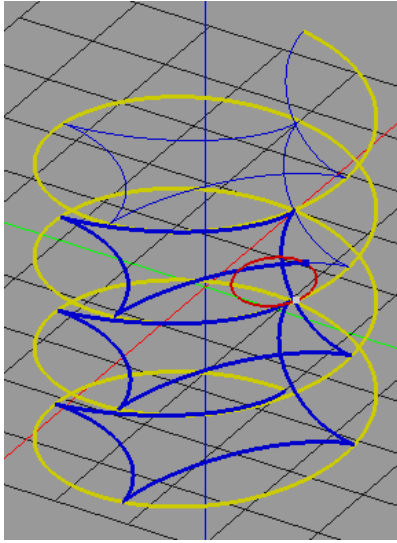
$$+ \frac{-b \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}} z + (a - r) \sin t$$

$$P_{3z} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(-\sin\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t\right)\right) x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{r} t\right) y + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} z + bt$$

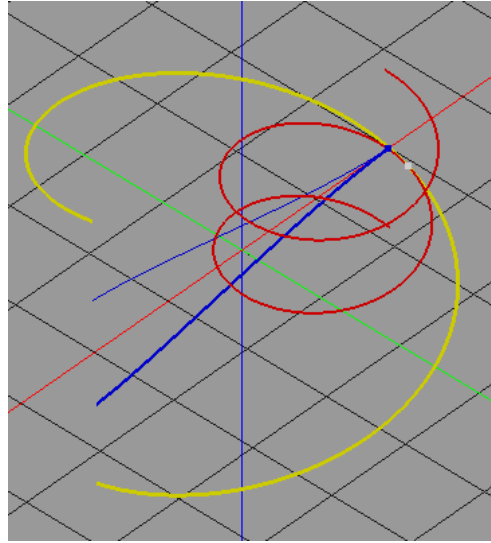


Obr. 3.5 Kotúľanie v priestore kružnice po skrutkovici, $r = 2$, $a = 4$, $b = 1$

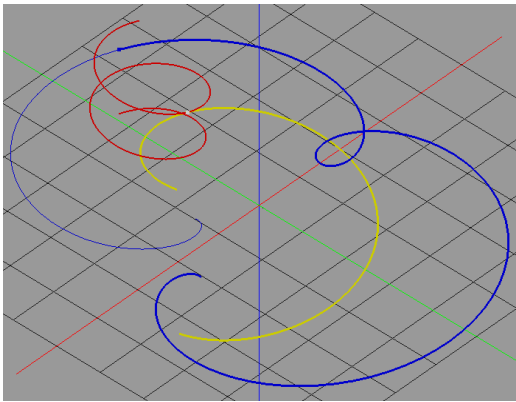
Na záver si ešte ukážme niekoľko kriviek, ktoré vznikli kotúľaním dvoch kriviek po sebe v priestore.



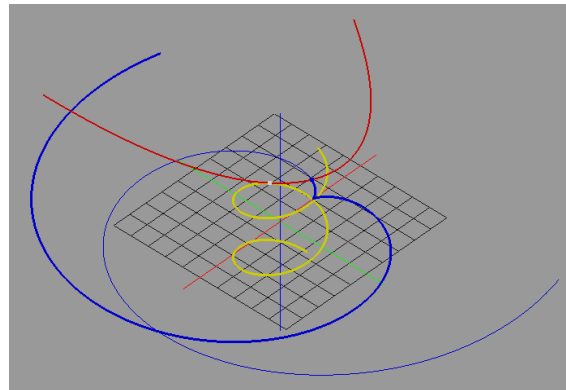
Obr. 3.6 Kotúľanie zvnútra podľa (3.5a), fixná skrutkovica s parametrami $a_f = 4$, $b_f = 0.4$, kotúľaná kružnica $r = 1$, kotúľaný bod $(1, 0, 0)$



Obr. 3.7 Kotúľanie zvnútra podľa (3.5a), fixná skrutkovica s parametrami $a_f = 4$, $b_f = 1$, kotúľaná skrutkovica s parametrami $a_k = 2$, $b_k = 0.3$, kotúľaný bod $(2, 0, 0)$



Obr. 3.8 Kotúľanie zvonka podľa (3.5c), fixná skrutkovica s parametrami $a_f = 4$, $b_f = 1$, kotúľaná skrutkovica s parametrami $a_k = 2$, $b_k = 0.3$, kotúľaný bod $(3, 0, 0)$

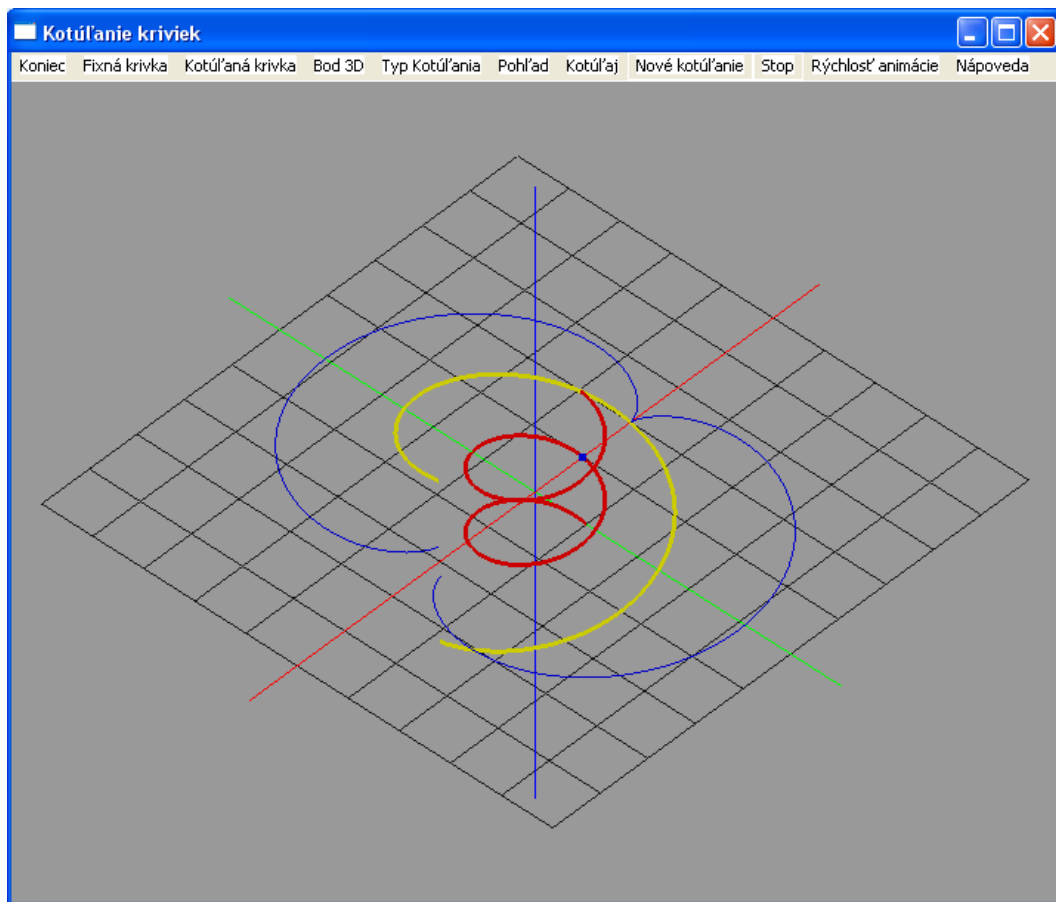


Obr. 3.9 Kotúľanie zvonka podľa (3.5c), fixná skrutkovica s parametrami $a_f = 4$, $b_f = 1$, kotúľaná reťazovka s parametrom $a_k = 10$, kotúľaný bod $(0, 10, 0)$

4 Vizualizácia

Cieľom softvérového diela je správne zobrazit' krivku, ktorá vznikne kotúľaním jednej krivky po druhej. Aplikácia bola vytvorená v Microsoft Visual Basic 6.0 s využitím knižnice OpenGL. Program umožňuje rotovať okolo osí, voliť fixnú a kotúľanú krivku, meniť ich parametre, ako aj meniť typ zobrazenia. Dôležité časti algoritmu ako aj prostredia si opíšeme v nasledujúcich častiach.

4.1 Používateľské prostredie



Obr. 4.1 Používateľské prostredie

Po spustení aplikácie sa používateľovi v okne zobrazia preddefinované dve krivky, ktoré chceme kotúľať. Sú to dve skrutkovice s parametrami $a = 4$, $b = 1$ pre fixnú krivku a $a = 2$, $b = 0.4$ pre kotúľanú krivku. Dĺžka kotúľanej krivky závisí od dĺžky fixnej krivky, keďže chceme aby ich parametrizácie boli zosúladené. Zvolené je kotúľanie zvonka.

Používateľ si natočenie kamery volí pomocou myši. Pri držaní pravého tlačidla myši rotuje okolo počiatku súradnicovej sústavy scény, tým umožňuje prakticky ľubovoľný uhol pohľadu na scénu. Pri držaní ľavého tlačidla sa mení priblíženie kamery.

Na hornom lištovom menu máme niekoľko ponúk, ktoré si teraz popíšeme bližšie:

„Koniec“ – ukončí aplikáciu.

„Fixná krivka“ – otvorí sa okno s možnosťou voľby fixnej krivky a nastavenia jej parametrov. Navyše pri skrutkovici umožňuje nastaviť počet jej závitov resp. dĺžku intervalu na ktorom sa vykresľuje. V prípade, keď $b = 0$ dostávame kružnicu, vtedy počet závitov nastavuje počet obehnutí kotúlanej krivky po kružnici. Interval možno nastaviť aj pri zvolení ostatných fixných kriviek. Fixná reťazovka je posunutá tak, aby začínala v počiatku súradnicovej sústavy. Každé okno sa zatvorí po stlačení „Zatvor okno“.

„Kotúľaná krivka“ – otvorí sa okno s možnosťou voľby kotúlanej krivky a nastavenie jej parametrov.

„Bod 3D“ – v zobrazenom okne umožní nastaviť súradnice nášho kotúľaného bodu. Sú to súradnice vzhľadom na kotúľanú krivku.

„Typ kotúľania“ – vyberám z ponuky sa uskutoční jeden zo štyroch typov kotúľania uvedených v tretej kapitole.

„Pohľad“ – používateľ si môže zvoliť pohľad z ľubovoľnej osi. Navyše poskytuje voľbu buď ortogonálnej, alebo perspektívnej projekcie.

„Kotúľaj“ – spustí kotúľanie a zablokuje nastavovanie parametrov, voľbu kotúľaného bodu, typ kotúľania.

„Nové kotúľanie“ – umožní nastaviť nový pohyb, nové nastavenie parametrov, kotúľaný bod a aj nový typ kotúľania.

„Stoj“ – zastaví súčasné kotúľanie, ktoré možno spustiť opätovne po stlačení kotúľaj.

„Rýchlosť animácie“ – nastaví spomalenie animácie.

„Nápoveda“ – krátke informácie o ovládaní aplikácie.

4.2 Realizácia kotúľania kriviek

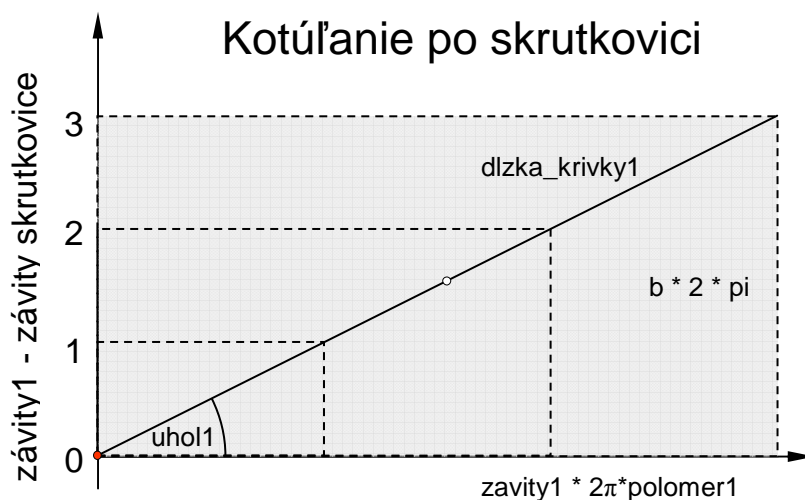
Dôležité, pre správne kotúľanie oboch kriviek, je mať ich zosúladené parametrizácie. Potrebujeme, aby sa pri procese kotúľania neprekázavali, inými slovami chceme aby prejdený úsek bol rovnaký na oboch krivkách. Opíšeme si dôležité premenné a procedúry, ktoré používame na správne vykresľovanie kotúľaných kriviek.

Funkcie a premenné v programe by sme mohli rozdeliť do niekoľkých skupín. Prvá časť zabezpečuje výpočty a geometriu zahrnutú v tretej kapitole. Druhá časť zabezpečuje animačnú stránku pohybu. Tretia časť slúži na správnu interakciu medzi používateľom a aplikáciou.

Keďže pracujeme v trojrozmernom priestore, potrebujeme inicializovať knižnicu OpenGL. Zabezpečíme to pomocou funkcie Initialize. Spustenie OpenGL v programe je prebraté z [9] a vložené do funkcie Initialize.

```
Function Initialize() As Boolean
    ...
    Initialize = True
End Function
```

Najviac pozornosti si zaslúži hlavná procedúra Form_Load. V nej sa v slučke opakujú všetky hlavné podprogramy na kreslenie fixnej krivky, vypočítanie matice, vykreslenie novovzniknutej krivky a animačná časť. Na začiatku sa nastavujú počiatočné hodnoty premenných a viditeľnosť jednotlivých komponentov. V slučke sa opakujú všetky dôležité podprogramy. Dĺžku fixnej krivky, konkrétne skrutkovice, si vieme ľahko vypočítať. Ak si predstavíme, že skrutkovica je namotaná na plášť valca, tak ju vieme „rozvinúť“ do roviny. Rozvinutím vznikne úsečka. Tá je rôznobežná s osou x. Takýmto rozvinutím dostaneme pravouhlý trojuholník. Z neho dĺžku úsečky vypočítame ľahko z Pytagorovej vety. Celý proces nám slúži len na odhad definovania intervalu na vykresľovanie, keďže všetky krivky sú v prirodzených parametrizáciách. Potom vieme skrutkovicu vykresľovať s rôznym počtom závitov. Na lepšiu predstavu slúži Obr. 4.2.



Obr. 4.2 Vlastnosť skrutkovice

Takto získaný interval určuje dĺžky všetkých kriviek v programe.

```

Private Sub Form_Load()
Frame1.Visible = False
...
Frame7.Visible = False

vyska1 = 1: polomer1 = 0.4: zavity1 = 1
...
postup = -2: krok = 0: rychlost_animacie = 0
  If btnUnload Then Exit Sub
  Initialize
  ...
  Do Until btnUnload
    DoEvents
    If btnUnload Then Exit Do
    If Me.Width < 10755 Then Me.Width = 10755
    If Me.Height < 9150 Then Me.Height = 9150
    dlzka1_rovina = zavity1 * 2 * pi * polomer1
    dlzka_krivky1 = Sqr((b * 2 * pi) ^ 2 + dlzka1_rovina ^ 2)
    a = polomer1: aa = polomer2
    b = vyska1 / 10
    bb = vyska2 / 10
    pozx = sur_x: pozy = sur_y: pozz = sur_z
    If pohyb Then
      If -2 < postup And postup < koniec2 * zavity1 Then
        postup = postup + krok
      End If
      glClear GL_COLOR_BUFFER_BIT Or GL_DEPTH_BUFFER_BIT
      Suradnice
      glColor3f 0.8, 0.8, 0.8
      krivka
      matica
      ruleta
      If postup > -1 Then
        animacia
        If postup = 1 Then Sleep 250
      Else
        krivka2
      End If
      SwapBuffers Me.hDC
    End If
  Loop
  ...
End
End Sub

```

Procedúra matica vypočíta krivku vzniknutú kotúľaním jednej krivky po druhej. Všetky premenné sú v súlade so vzorcami (1.3), (1.4) a vzorcami (3.5a), (3.5b), (3.5c), (3.5d) pre výpočet krivky. Pole „vysledok0-3(j)“ je globálna premenná a uchováva informácie o súradniciach výslednej krivky pre každú hodnotu premennej i , ktorú vykresľujeme v procedúre ruleta.

```

Public Sub matica()
...
For j = 0 To koniec2 * zavity1
  If fixna_krivka = 3 Or kotulana_krivka = 3 Then
    i = (j + 1) * pi / 180
  Else
    i = (j - koniec2 * zavity1 / 2) * pi / 180
  End If
  ...
  vysledok0(j) = m(j, 0) * pozx + m(j, 4) * pozy + m(j, 8) * pozz + m(j, 12) * pozw
  vysledok1(j) = m(j, 1) * pozx + m(j, 5) * pozy + m(j, 9) * pozz + m(j, 13) * pozw
  vysledok2(j) = m(j, 2) * pozx + m(j, 6) * pozy + m(j, 10) * pozz + m(j, 14) * pozw
  vysledok3(j) = m(j, 3) * pozx + m(j, 7) * pozy + m(j, 11) * pozz + m(j, 15) * pozw
Next j
End Sub

```

```

Public Sub ruleta()
  Dim i As Integer
  glLineWidth (3)
  glColor3f 0, 0, 0.8
  glPushMatrix
  ...
  glBegin GL_LINE_STRIP
  For i = 0 To postup
    glVertex4f vysledok0(i), vysledok1(i), vysledok2(i), vysledok3(i)
  Next i
  glEnd
  ...
  glPopMatrix
End Sub

```

Na animačnú časť pohybu po skrutkovici sme opäť využili matice. Procedúra vypočíta maticu, ktorá v každom momente posúva celú krivku tak, aby sa dotýkali v jednom bode a mali v ňom spoločné vektory normály, binormály a dotykové vektory. Túto skutočnosť využijeme na animačnú časť. Celú maticu uchováваме v poli. Potom pre každým moment t_0 matice \mathbf{M} z (3.5a), (3.5b), (3.5c), (3.5d) vykreslíme celú krivku, ktorú kotúľame. Spolu s ňou vykreslíme aj kotúľaný bod a bod dotyku.

```

Public Sub animacia()
  Dim j, sk As Integer
  Dim vysledokx(1210), vysledoky(1210), vysledokz(1210), vysledokw(1210)
  j = postup
  glLineWidth (2)
  glColor3f 0.8, 0, 0
  glPushMatrix
  ...
  glBegin GL_LINE_STRIP
  For sk = 0 To koniec2 * zavity1
    vysledokx(sk) = m(j, 0) * P2x(sk) + m(j, 4) * P2y(sk) + m(j, 8) * P2z(sk) + m(j, 12)
    vysledoky(sk) = m(j, 1) * P2x(sk) + m(j, 5) * P2y(sk) + m(j, 9) * P2z(sk) + m(j, 13)
    vysledokz(sk) = m(j, 2) * P2x(sk) + m(j, 6) * P2y(sk) + m(j, 10) * P2z(sk) + m(j, 14)
    vysledokw(sk) = m(j, 3) * P2x(sk) + m(j, 7) * P2y(sk) + m(j, 11) * P2z(sk) + m(j, 15)
    glVertex4f vysledokx(sk), vysledoky(sk), vysledokz(sk), vysledokw(sk)
  Next sk
  glEnd

```

```

glPopMatrix
glColor3f 0.8, 0.8, 0.8
glPushMatrix
  glBegin GL_POINTS
  glPointSize (4)
  If fixna_krivka = 2 Then
    glVertex3f P1x(j), P1y(j) - aa2, P1z(j)
  Else
    glVertex3f P1x(j), P1y(j), P1z(j)
  End If
glEnd
glPopMatrix
glColor3f 0, 0, 0.8
glPushMatrix
...
glPointSize (5)
glBegin GL_POINTS
  vysledokx(j) = m(j, 0) * pozx + m(j, 4) * pozy + m(j, 8) * pozz + m(j, 12)
  vysledoky(j) = m(j, 1) * pozx + m(j, 5) * pozy + m(j, 9) * pozz + m(j, 13)
  vysledokz(j) = m(j, 2) * pozx + m(j, 6) * pozy + m(j, 10) * pozz + m(j, 14)
  vysledokw(j) = m(j, 3) * pozx + m(j, 7) * pozy + m(j, 11) * pozz + m(j, 15)
  glVertex4f vysledokx(j), vysledoky(j), vysledokz(j), vysledokw(j)
glEnd
glPopMatrix
glLineWidth (1)
Sleep rychlost_animacie
End Sub

```

Procedúra display zabezpečuje korektné nastavenie pohľadu na scénu. Volí projekciu, v akej sa má scéna vyobrazovať. Pohyb v scéne si predstavme ako pohyb po guli, ktorej stred je stredom v súradnej sústavy scény. Z každej pozície sa pozeráme na stred scény. Spolu s procedúrami na ovládanie myši zabezpečujú rotáciu a približovanie v scéne.

```

Public Sub display()
  glViewport 0, 0, Me.ScaleWidth, Me.ScaleHeight
  glMatrixMode GL_PROJECTION
  glLoadIdentity
  If ort Then
    glOrtho -1.5 - t, 1.5 + t, -1.5 * Me.ScaleHeight / Me.ScaleWidth - t, 1.5 * Me.ScaleHeight /
Me.ScaleWidth + t, -100, 100
  Else
    gluPerspective 30, Me.ScaleWidth / Me.ScaleHeight, 1, 100
  End If
  glMatrixMode GL_MODELVIEW
  glLoadIdentity
  xx = r * Cos(angle2) * Cos(angle)
  yy = r * Cos(angle2) * Sin(angle)
  zz = r * Sin(angle2)
  If (zz <= 0) Then cam = -1
  If (zz > 0) Then cam = 1
  If (angle2 <= pi / 2) And (angle2 >= -pi / 2) Then cam2 = 1
  Else: cam2 = -1
  End If
  gluLookAt -xx, -yy, zz, 0, 0, 0, 0, 0, cam2
End Sub

```

Premenné *angle*, *angle2*, *r* a *t* sa menia pri manipulácii s myšou. Zmenou parametrov sa nastaví nový pohľad scény. Premenná *r* je polomer gule. Pri zmenšovaní alebo zväčšovaní sa v scéne približujeme alebo oddiaľujeme. Premenná *t* má rovnaký význam, mení šírku záberu okna v ortogonálnej projekcii. Zmenou parametra máme dojem zväčšovania a zmenšovania pohľadu scény.

Ak chceme dostať kotúľanie dvoch rovinných kriviek, keďže reťazovka je rovinná krivka, stačí si zvoliť výšku skrutkovice nulovú. Tým dostaneme kružnicu. Potom pri pohľade zo z-ovej osi máme kotúľanie v rovine *xy* pre kružnice a reťazovky. Týmto postupom sa dopracujeme k obrázkom, ktoré sme použili v druhej kapitole.

Ostatné procedúry, ktoré môžeme nájsť v programe, slúžia na správnu interakciu medzi používateľom a aplikáciou.

Záver

Diplomová práca sa venovala kotúľaniu jednej pohyblivej krivky po druhej fixnej krivke a krivkám, ktoré vznikli týmto pohybom. V teoretickej časti (druhá a tretia kapitola) sme dokázali, aké podmienky musia krivky spĺňať pre tento pohyb a ukázali jeho vlastnosti. Druhá kapitola priniesla nový prístup ku kotúľaniu v rovine, ktorého teóriu sme rozšírili do priestoru v tretej kapitole. Nový pohľad na kotúľanie pomocou zhodností spolu so stotožňovaním jednotkových vektorov v každom momente krivky sa javí ako prijateľný. Napriek tomu má svoje obmedzenia na inflexné body a hľadanie zosúladených parametrizácií. Výsledky v rovine získané týmto prístupom sú rovnaké ako príklady v dostupnej literatúre od Ruttera [7], Gibsona [4] a Kužel'a [6]. Na porovnanie sme priniesli aj ich obrázky, ktoré sú uvedené v druhej kapitole. Maticové vyjadrenie kotúľania v rovine a najmä v priestore bol hlavný cieľ práce. Softvérová aplikácia, ktorú sme opísali v štvrtej kapitole, mala za cieľ len ukázať, že daný prístup je vhodný. Pri tvorbe programu bolo dôležité splniť potrebné podmienky z teoretickej časti. To sa podarilo. Výsledkom práce je plnohodnotná teória kotúľania jednej krivky po druhej v rovine a v priestore spolu s praktickými ukážkami. Navyše naše riešenie výpočtu a zobrazenia kotúľania v priestore obsahuje kotúľanie v rovine ako špeciálny prípad, čo umožnilo tvorbu niektorých ilustračných obrázkov z druhej kapitoly.

Kotúľanie kriviek v geometrii je rozsiahla téma. V práci sa ako najväčší problém javí zosúladenie parametrizácií kriviek. To súvisí aj s hľadaním prirodzenej parametrizácie kriviek. Nájst' prirodzenú parametrizáciu nie je vôbec jednoduché. Preto k tomu môžeme pristúpiť aproximatívne ako v práci od Kužel'a [5]. Ďalšia práca by sa mohla zaoberať spomínanou problematikou a rozšíriť ju do priestoru, alebo by sa rozšírila teória kotúľania kriviek o kotúľanie krivky po ploche, prípadne plochy po ploche. Z doteraz napísanej teórie by sa jednalo o priamkové plochy.

Za veľmi vhodné by som pokladal aj nájst' praktickú využiteľnosť tejto problematiky. Do úvahy by mohli prísť konštrukcie mechanizmov s využitím v zábavnom priemysle, výroba talizmanov alebo vytváranie zaujímavých vzorov v umeleckej oblasti ako v článku od Harrisonovej [10].

Literatúra

Písomná literatúra

- [1] BOŽEK, M. Učebný text k predmetu Geometria pre grafikov. Nepochikované, 2008.
- [2] BOŽEK, M. Učebný text k predmetu Geometrické transformácie. Nepochikované, 2008.
- [3] BOŽEK, M. *Učebný text k predmetu Geometria (1)*. Nepochikované, 2009.
- [4] GIBSON, C.G. *Elementary Geometry of Differentiable Curves*. 1st ed. Cambridge University Press, 2001. 234 s. ISBN 0-521-80453-1.
- [5] HILBERT, D., COHN-VOSSEN, S., *Geometry and Imagination*, New York: Chelsea Publishing Company, 1990. 357 s. ISBN 0-8284-1087-9.
- [6] KUŽEL, V. *Rulety a ich vizualizácia*. Diplomová práca, Bratislava: Univerzita Komenského, 2007. 43 s.
- [7] RUTTER, J.W. *Geometry of curves*. 1st ed. London; New York; Washington, D.C.: Chapman&Hall/CRC, 2000. 361 s. ISBN 1-58488-166-6.

Elektronické dokumenty

- [8] BELAN, A. *Skripta2*. [online]. 2000. [cit. 2011.02.09]. Dostupné na internete: <<http://www.math.sk/skripta2/node1.html>>
- [9] DAHAUCH, P. *Visual Basic*. [online báza dát]. 2008. Dostupné na internete: <http://www.pauldahuach.com.ar/program_en.htm>
- [10] HARRISON, E. *Roulettes in Spherical Geometry*. [online]. 2006. [cit. 2010.09.27]. Dostupné na internete: <<http://www.diskitty.ca/gallery/code/cs798/project/paper.pdf>>
- [11] KOSTROVÁ, J. *Základy teórie kriviek*. [online]. 2004. [cit. 2010.09.17]. Dostupné na internete: <http://fstroj.uniza.sk/web/kam/sylaby/sylaby/pdf/14_krivky.pdf>
- [12] ŘÍHOVÁ, H. *Křivky*. [online]. 2003. [cit. 2010.09.15]. Dostupné na internete: <<http://dagles.klenot.cz/rihova/krivky.html>>